Aufgaben

1. Eine Waage zeigt für die Masse eines Körpers $m = 1.2356$ kg an, wobei die systematische Messunsicherheit dieser Waage mit 0.01234 kg angegeben wurde. Der Körper mit Masse m wird durch eine konstante Kraft F in x-Richtung beschleunigt. Diese Kraft F wurde in einem Experiment mit einem systematischen Fehler von $\Delta F_{\text{sys}} = 0.10\,\text{N}$ fünfmal gemessen:

$$F_1 = 5.10\,\text{N} \qquad F_2 = 4.40\,\text{N} \qquad F_3 = 5.30\,\text{N} \qquad F_4 = 5.00\,\text{N} \qquad F_5 = 5.20\,\text{N}$$

   (a) Wie ist das Ergebnis der Massenbestimmung unter Berücksichtigung der beiden Regeln bezüglich der Anzahl signifikanter Stellen anzugeben?
   (b) Bestimme bei den obigen Messdaten zur Kraft F durch Rechnung von Hand mit Hilfe der gegebenen statistischen Formeln den arithmetischen Mittelwert $\bar{F}$, die Standardabweichung σ_F und den mittleren Fehler des Mittelwerts $\sigma_{\bar{F}}$ und gib den ausführlichen Lösungsweg an.
   (c) Wie gross ist der statistische Fehler der Kraft F?
   (d) Welche Beschleunigung a wirkt auf den Körper mit der Masse m in x-Richtung?
   (e) Innerhalb von welchem Beschleunigungsintervall liegt die wahre Beschleunigung des Körpers mit der Masse m mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%?

2. Die Messgrösse F_i wurde mehrfach mit verschiedenen Messungen bestimmt. Die systematischen Fehler sind unterschiedlich, wie die folgende Auflistung zeigt:

$$F_1 = (5.1 \pm 0.2)\,\text{N} \quad F_2 = (4.4 \pm 0.1)\,\text{N} \quad F_3 = (5.3 \pm 0.2)\,\text{N} \quad F_4 = (5.0 \pm 0.3)\,\text{N} \quad F_5 = (5.2 \pm 0.2)\,\text{N}$$

   (a) Berechne mit den untenstehenden Formeln den gewichteten Mittelwert der Kraft $\bar{F}_g$. Inwiefern unterscheidet sich das Ergebnis vom arithmetischen Mittelwert $\bar{F}$ aus Aufgabe 1? Warum?
   (b) Wie gross ist die Messunsicherheit ΔF des gewichteten Mittelwerts $\bar{F}_g$?

Formelsammlung

Im folgenden seien die Formeln für den arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$, die Standardabweichung σ_x und den mittleren Fehler des Mittelwerts $\sigma_{\bar{x}}$ gegeben. Dabei sei x_i der i-te von N Messwerten.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Für den gewichteten Mittelwert $\bar{x}_g$ und die Messunsicherheit Δx des gewichteten Mittelwerts gilt

$$\left.\begin{matrix} x_1 \pm \Delta x_1 \\ x_2 \pm \Delta x_2 \\ x_3 \pm \Delta x_3 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \quad \bar{x}_g = \frac{\sum g_i \cdot x_i}{\sum g_i} \quad \text{und} \quad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{\sum g_i}} \quad \longrightarrow \quad x = \bar{x}_g \pm \Delta x \quad \text{mit} \quad g_i = \frac{1}{\Delta x_i^2}$$

Sei $h = h(k, l, m, ...)$ eine indirekt messbare physikalische Grösse, die von den gemessenen Grössen $k, l, m, ...$ abhängt. Dann gilt für den systematischen Fehler Δh_{sys} und den statistischen Fehler Δh_{stat}

$$\Delta h_{\text{sys}} = \left|\frac{\partial h}{\partial k} \cdot \Delta k_{\text{sys}}\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial l} \cdot \Delta l_{\text{sys}}\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial m} \cdot \Delta m_{\text{sys}}\right| + ...$$

$$\Delta h_{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial k} \cdot \Delta k_{\text{stat}}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial l} \cdot \Delta l_{\text{stat}}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial m} \cdot \Delta m_{\text{stat}}\right)^2 + ...}$$

Tipp: Das zweite Newton'sche Gesetz besagt, dass die Kraft $\vec{F}$ das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung $\vec{a}$ ist, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.