Anleitung zum Physikpraktikum

für Oberstufenlehrpersonen

Fehlerrechnung und Statistik (FR)

Herbstsemester 2013

Physik-Institut der Universität Zürich

Inhaltsverzeichnis

12 Fehlerrechnung und Statistik (FR)

12.1 Einleitung

Die exakte Messung einer physikalischen Grösse ist nicht möglich. Jede Messung weist Fehler auf, die systematisch oder zufällig sind. Das Ergebnis der Messung muss deshalb ausser dem Messwert eine Angabe über den Messfehler enthalten. Die Bestimmung des Messfehlers ist die Aufgabe der Fehlerrechnung.
Systematische Fehler sind vermeidbar, zufällige hingegen nicht. Die zufälligen Fehler werden nach Regeln aus der Statistik behandelt und erlauben daher eine einheitliche Interpretation.
Unsere kurze Anleitung[1] zur Fehlerrechnung wird diese Regeln für einfache Fälle darlegen. Zuvor aber sollen die Eigenschaften von Fehlern und einige Begriffe aus der Statistik besprochen werden.

12.2 Beobachtungsfehler

Zwei Arten von Beobachtungsfehlern werden unterschieden: die systematischen und die zufälligen. **Systematische Fehler** treten auf, wenn störende Einflüsse unberücksichtigt oder unerkannt bleiben, die das Ergebnis immer in der gleichen Richtung verfälschen. Das Wiederholen derselben Messung eliminiert solche Fehler nicht.
Beispiele:

- Bei einer Messung mit dem Mikrometer wird das Objekt zusammengedrückt.
- Bei einzelnen Menschen beschleunigt das Fühlen des Pulses jedesmal den Herzschlag.
- Ein Instrument ist falsch geeicht.

Oft können solche Fehler durch eingehende Prüfung des Messvorganges, eventuell durch Vergleich mit einer andern Messmethode gefunden werden. Der Experimentator versucht, systematische Fehler zu vermeiden oder aber ihre Ursache zu erfassen und ihre Auswirkung auf das Messergebnis rechnerisch zu korrigieren. **Zufällige Fehler** lassen sich nicht vermeiden. Erfahrungsgemäss ergeben wiederholte Messungen derselben physikalischen Grösse nicht immer den gleichen Wert. Die Differenz des nachfolgenden zum vorangehenden Messwert fällt unregelmässig aus, einmal positiv, dann wieder negativ. Auch ihr Betrag wechselt innerhalb gewisser Grenzen ganz zufällig. Zur Schätzung der Grösse zufälliger Fehler sind viele Messwerte nötig, die zum Beispiel durch Wiederholen der Messung unter gleichen Bedingungen gewonnen werden.
Hat die Messgrösse einen festen Wert, so streuen beim Wiederholen die Ergebnisse um einen mittleren Wert, der dem wahren Wert im allgemeinen umso näher kommt, je mehr Messungen vorliegen. Die Verteilung der Ergebnisse um den mittleren Wert erlaubt die Schätzung des Fehlers.
Streut dagegen die Messgrösse selber um einen mittleren Wert, so gilt das Hauptinteresse der Verteilung. Der mittlere Wert und ein Mass für die Streuung sind ihre wichtigsten Kennzeichen. Misst man zum Beispiel die Höhe von je 50 Fichten bestimmten Alters an verschiedenen

[1] Wichtige Teile dieser Anleitung stützen sich auf Vorlesungen, die Prof. B. L. van der Warden an der Universität Zürich gehalten hat, und auf sein Buch: Mathematische Statistik, Springer 1965. Ausserdem verweisen wir auf die Skripten zur Vorlesung von Prof. H. H. Storrer: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften.

Standorten, so ergibt sich für jeden Standort eine Verteilung um die mittlere Höhe. Der Vergleich dieser Verteilungen dient etwa zur Klärung der Frage, ob und wie sich die Höhen an verschiedenen Standorten unterscheiden. In diesem Fall sind die Messfehler ganz unbedeutend im Vergleich zu den Höhenunterschieden von Baum zu Baum. Wird dagegen derselbe Baum 50 mal gemessen, so ergibt sich eine ganz anders geartete Verteilung, die durch das Messverfahren beeinflusst ist.
Um überhaupt eine Verteilung der Messwerte feststellen zu können, muss in beiden Fällen die Messeinrichtung **ausreichend empfindlich** sein. Andernfalls ergibt sich bei jeder Wiederholung derselbe Zahlenwert auf einer wie auch immer gearteten Anzeige. Die Messeinrichtung ist dann zu grob, um die Streuung der Messwerte zu erfassen. Der Messfehler lässt sich nicht nach den Regeln der Statistik bestimmen. Er muss geschätzt werden. Er ist von der Grössenordnung des minimalen Anzeigeintervalls.
Im folgenden besprechen wir ausschliesslich die Fehler einer Messgrösse mit festem Wert. Dabei nehmen wir an, dass keine systematischen Fehler vorliegen und dass die Messeinrichtung so empfindlich sei, dass die zufälligen Fehler beobachtet werden können.

12.3 Statistische Beschreibung von Verteilungen

12.3.1 Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Wenn beim Würfeln in 100 Würfen 17-mal die 3 erscheint, so ist die Häufigkeit 17/100 oder 17%. Die **Häufigkeit** h_i eines Ereignisses i ist die Anzahl k_i jener Fälle, in denen es eingetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl n der Fälle:

$$h_i = \frac{k_i}{n} \tag{12.1}$$

Die Häufigkeit unterliegt zufälligen Schwankungen. Bei 100 andern Würfen erscheint die drei vielleicht 15 oder 18 mal. Unter diesem Gesichtspunkt bezeichnet man eine Serie von n Würfen als Stichprobe. Die Häufigkeit schwankt unter gleichbleibenden Umständen um einen Durchschnittswert. Diesen nennt man die **Wahrscheinlichkeit** p_i des Ereignisses. Sie hängt nicht vom Zufall ab. Wenn die Versuchszahl klein ist, sind beträchtliche Schwankungen der Häufigkeit zu erwarten. Ist sie aber gross, so wird h_i meistens nahe bei p_i liegen. Für die Grössenordnung σ der zu erwartenden Abweichungen $|h_i - p_i|$ berechnet man in der Statistik:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{p_i\,(1-p_i)}{n}} \tag{12.2}$$

Abweichungen grösser als 2σ kommen nur selten vor, grössere als 3σ fast nie.
Mit zunehmendem n bildet die Häufigkeit ein immer genaueres Mass für die Wahrscheinlichkeit. Auf diesem Gesetz der grossen Zahl beruht die prinzipielle Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten statistisch zu erfassen. Die Auswahl der Fälle muss aber rein durch Zufall bedingt sein. Man darf die Statistik nicht fälschen. Auch müssen die einzelnen Fälle voneinander unabhängig sein. Der Ausgang des zehnten Versuches darf nicht von dem der ersten neun abhängen.
Beim Würfelspiel ist 3 nicht die einzige Augenzahl, die erscheinen kann. Im Gegenteil: von einem guten Würfel wird erwartet dass jede der sechs Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von einem Sechstel vorkommt. Die Verteilung der Wahrscheinlichkeit auf die betreffenden Augenzahlen besteht aus sechs gleichen Werten. Für die Häufigkeit gilt das nur näherungsweise

Augenzahl	Stichprobe 1		Stichprobe 2		Stichprobe 3	
i	10^2 Würfe	h_i	10^4 Würfe	h_i	10^6 Würfe	h_i
1	14	0.14	1666	0.1666	167009	0.167009
2	16	0.16	1644	0.1644	166059	0.166059
3	15	0.15	1673	0.1673	166373	0.166373
4	21	0.21	1697	0.1697	166480	0.166480
5	16	0.16	1676	0.1676	167533	0.167533
6	18	0.18	1644	0.1644	166546	0.166546
σ	$4 \cdot 10^{-2}$		$4 \cdot 10^{-3}$		$4 \cdot 10^{-4}$	

Tabelle 12.1: Beispiele für die Resultate von drei Stichproben beim Würfelspiel.

wegen der zufälligen Schwankungen. Tabelle 12.1 zeigt den Ausgang für drei verschieden grosse Stichproben.

In einem sogenannten **Histogramm** (Abbildung 12.1) ist die erste Stichprobe dargestellt. Für jede Augenzahl i ist darin die Häufigkeit h_i als Rechteckfläche dargestellt. Alle Rechtecke zusammen haben die Fläche:

$$\sum_{i=1}^{6} h_i = 1 \tag{12.3}$$

Das bedeutet, dass bei jedem Wurf mit Sicherheit irgend eine der sechs Augenzahlen erscheint.

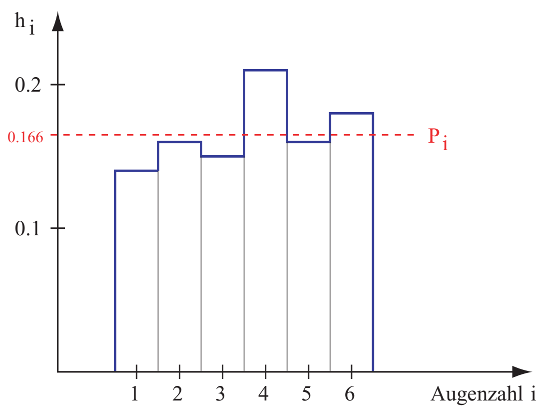

Abbildung 12.1: Histogramm mit den Häufigkeiten zum Resultat der ersten Stichprobe aus Tabelle 12.1 beim Würfelspiel.

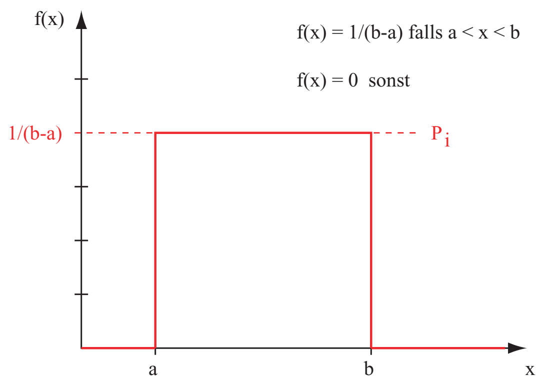

Abbildung 12.2: Wahrscheinlichkeitsdichte einer uniformen Verteilung.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Würfelspiel heisst diskret, weil die Zufallsgrösse (die Augenzahl) nur eine endliche Anzahl bestimmter Werte annimmt. Im andern Extremfall heisst die Verteilung kontinuierlich. Dann existiert eine Funktion $f(x)$, die sog. Wahrscheinlichkeitsdichte, mit der Eigenschaft, dass $f(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die Zufallsgrösse Werte zwischen x und $x + dx$ annimmt. Da x sicher irgendeinen Wert annimmt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür gleich 1. Also gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1 \tag{12.4}$$

Als Beispiel kann die Verteilung für eine Zufallsgrösse dienen, für die zwischen den Grenzen a und b alle Werte gleich wahrscheinlich sind (Abbildung 12.2).
Liegt eine Reihe von Messergebnissen vor, so kann der ganze Wertebereich in Intervalle unterteilt werden (siehe das Beispiel im Abschnitt 12.4.2). Nun lässt sich für jedes einzelne Intervall angeben, wie oft ein Messwert in das betreffende Intervall fällt. Dafür kann man die Häufigkeit berechnen. Diese Häufigkeiten hängen wieder von der Stichprobe ab. Ist sie sehr gross, so gleichen sich die zufälligen Schwankungen aus und die Häufigkeiten werden näherungsweise gleich den Wahrscheinlichkeiten. Das sieht man auch, wenn man die Werte aus Tabelle 12.1 der 3 Stichproben vergleicht. Der Messvorgang legt die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten fest. Diese ist meistens unbekannt und muss daher aus der Verteilung der Häufigkeiten in einer Stichprobe geschätzt werden. Eine solche Schätzung fällt mehr oder weniger genau aus, da jede Stichprobe zwangsläufig begrenzt ist (verfügbare Zeit, Auswahl, Kosten,...). In diesem Sinne entzieht sich die Wahrscheinlichkeit der exakten Beobachtung.

12.3.2 Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die Statistik definiert als wichtigste Merkmale einer Verteilung der Zufallsgrösse x den **Erwartungswert** $\hat{x}$ und die **Varianz** σ^2 mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgrösse einen bestimmten Wert annimmt.
Ist die Verteilung diskret, und nimmt die Zufallsgrösse x die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ an, so wird definiert:

$$\text{Erwartungswert:} \qquad \hat{x} = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot p_k \tag{12.5}$$

$$\text{Varianz:} \qquad \sigma^2 = \sum_{k=1}^{m} (x_k - \hat{x})^2 \cdot p_k \tag{12.6}$$

Die **Standardabweichung** σ (die Quadratwurzel aus der Varianz) ist ein Mass für die Streuung um x. Abweichungen $|x_k - \hat{x}|$ grösser als 2σ kommen selten vor, grössere als 3σ fast nie. In der Fehlertheorie nennt man die Abweichung $(x_k - \hat{x})$ den zufälligen Fehler.

12.3.3 Lineare Funktionen mehrerer Zufallsvariablen

Bei Anwendungen der Statistik in der Fehlerrechnung kommen Funktionen von Zufallsgrössen häufig vor. Für lineare Funktionen benützen wir die folgenden Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Sind x und y zufällige Grössen, so ist es auch die Summe $z = x + cy$ (c konstant). Für den Erwartungswert von z wird gezeigt:

$$\hat{z} = \hat{x} + c\hat{y} \tag{12.7}$$

Für die Varianz σ_z^2 von z gilt

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + c^2 \cdot \sigma_y^2 \tag{12.8}$$

falls x und y voneinander unabhängig sind (das heisst: die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im gepaarten Ereignis (x, y) die Grösse x den Wert x_k annimmt, hängt nicht vom Wert y_k ab, den die Grösse y annimmt, und umgekehrt). Dabei bezeichnen σ_x^2 und σ_y^2 die Varianzen der Grössen x und y.

Die Gleichungen (12.7) und (12.8) lassen sich auf mehr als zwei Zufallsgrössen verallgemeinern. Als wichtiges Beispiel betrachten wir das arithmetische Mittel z von n unabhängigen Zufallsgrössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{12.9}$$

Haben alle Zufallsgrössen x_i dieselbe Verteilung, also je den gleichen Erwartungszwert x und die gleiche Varianz σ^2, so folgt für den Erwartungswert $\hat{z}$ und die Varianz σ_z^2 des arithmetischen Mittels:

$$\hat{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = \frac{1}{n} n\hat{x} = \hat{x} \tag{12.10}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \tag{12.11}$$

12.4 Mittelwert und Fehler einer Stichprobe

12.4.1 Definitionen

Wird die physikalische Grösse x auf dieselbe Weise n mal gemessen, so entsteht eine Stichprobe von Messwerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Diese Werte streuen um den Erwartungswert $\hat{x}$ in einem Ausmass, das durch σ erfasst ist. Da aber die Wahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind, müssen diese mit Hilfe der beobachteten Häufigkeiten geschätzt werden.
Anstelle des Erwartungswertes $\hat{x}$ ergibt sich der Mittelwert $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{12.12}$$

und statt der Standardabweichung σ der Fehler der Einzelmessung s

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{12.13}$$

Der Fehler m des Mittelwertes $\bar{x}$ beträgt gemäss Gleichung (12.11)

$$m = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{12.14}$$

Oft wird auch der relative Fehler r des Mittelwertes angegeben:

$$r = \frac{m}{\bar{x}} \tag{12.15}$$

Im Gegensatz zum relativen Fehler bezeichnen wir m auch als absoluten Fehler. Die Grössen $\bar{x}$ und s hängen von der Stichprobe ab und sind somit zufällig. Für hinreichend grosse Stichproben ist s ein Mass für die erwarteten Abweichungen $|x_i - \hat{x}|$ einzelner Messwerte vom Erwartungswert, m dagegen ein Mass für die Abweichungen des Mittelwertes $\bar{x}$ vom Erwartungswert $\hat{x}$.

12.4.2 Beispiel

Es werden 30 Messungen derselben Länge x mit derselben Sorgfalt und unter denselben Bedingungen vorgenommen. Die Ablesegenauigkeit unseres Massstabes erlaube die Schätzung der Länge auf 0.1 cm genau.

x_i (cm)	$(x_i - \bar{x})$ (cm)	$(x_i - \bar{x})^2$ (cm^2)		x_i (cm)	$(x_i - \bar{x})$ (cm)	$\cdot(x_i - \bar{x})^2$ (cm^2)
15.4	-0.10	0.0107		15.3	-0.20	0.0413
15.6	+0.10	0.0093		14.9	-0.60	0.3640
15.7	+0.20	0.0387		15.5	0.00	0.0000
15.8	+0.30	0.0880		15.5	0.00	0.0000
15.6	+0.10	0.0093		15.1	-0.40	0.1627
15.4	-0.10	0.0107		14.9	-0.60	0.3640
15.5	0.00	0.0000		15.5	0.00	0.0000
15.5	0.00	0.0000		16.0	+0.50	0.2467
15.9	+0.40	0.1573		15.5	0.00	0.0000
15.5	0.00	0.0000		15.3	-0.20	0.0413
15.8	+0.30	0.0880		15.2	-0.30	0.0920
16.1	+0.60	0.3560		15.4	-0.10	0.0107
15.3	-0.20	0.0413		15.7	+0.20	0.0387
15.6	+0.10	0.0093		15.6	+0.10	0.0093
15.4	-0.10	0.0107		15.6	+0.10	0.0093
				465.1	0.10	2.2093

Tabelle 12.2: Beispiel für die Resultate einer Längenmessung.

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 465.1 \qquad \sum_{i=1}^{30} (x_i - \bar{x})^2 = 2.21 \quad \mathrm{cm}^2$$

Die Summe über die Abweichungen $(x_i - \bar{x})$ sollte 0 sein, ist aber 0.1 cm. Dieser Unterschied ergibt sich aus den Rundungsfehlern.
Nach den Gleichungen (12.12) bis (12.15) wird:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{30}\cdot 465.1 \quad \mathrm{cm} = 15.503 \quad \mathrm{cm} \\
s &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{29}\cdot 2.21 \quad \mathrm{cm}^2} = 0.276 \quad \mathrm{cm} \\
m &= \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.050 \quad \mathrm{cm} \\
r &= \frac{m}{\bar{x}} = \frac{0.050}{15.503} = 0.0032 = 0.3\%
\end{aligned}$$

Das Ergebnis, der Mittelwert mit seinem Fehler, enthält die Zahlenwerte in einer Genauigkeit, die sich nach der Grösse des Fehlers richtet, und hat folgende Form:

$$x = (15.50 \pm 0.05) \quad \mathrm{cm}$$

12.4.3 Histogramme

Das Histogramm in der Abbildung 12.3 zeigt anschaulich die Verteilung der Messwerte für das Beispiel aus Abschnitt 12.4.2. Dazu wird die Abszisse in gleiche Intervalle der Länge Δx (entsprechend der Ablesegenauigkeit ist $\Delta x = 0.1$ cm gewählt) so unterteilt, dass die möglichen Ablesungen x_k jeweils in der Mitte eines Intervalls liegen. Die Fläche $f_k \cdot \Delta x$ ist gleich der Häufigkeit $h_k = n_k/n$, wobei n_k die Anzahl jener Ergebnisse x_i bedeutet, die in das Intervall um x_k fallen. Somit ist

$$f_k = \frac{h_k}{\Delta x} = \frac{n_k}{n \cdot \Delta x} \tag{12.16}$$

In Tabelle 12.3 sind die Werte von x_k, n_k, f_k für $\delta x = 0.1$ cm und das Beispiel aus Abschnitt 12.4.2 aufgelistet.

x_k (cm)	n_k	f_k (cm^{-1})		x_k (cm)	n_k	f_k (cm^{-1})
14.8	0	0		15.6	5	1.67
14.9	2	0.67		15.7	2	0.67
15.0	0	0		15.8	2	0.67
15.1	1	0.33		15.9	1	0.33
15.2	1	0.33		16.0	1	0.33
15.3	3	1.0		16.1	1	0.33
15.4	4	1.33		16.2	0	0
15.5	7	2.33				

Tabelle 12.3: Verteilung der Messwerte

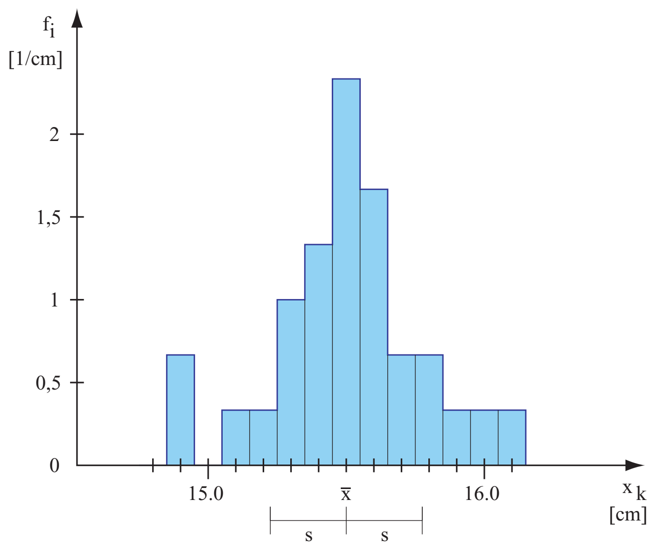

Abbildung 12.3: Histogramm zu den Resultaten einer Längenmessung (Tabelle 12.3).

Der Mittelwert $\bar{x}$ und der Fehler s der Einzelmessung lassen sich auch durch die Grössen x_k und

f_k ausdrücken:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_k x_k n_k = \sum_k x_k f_k \cdot \Delta x \tag{12.17}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_k (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k = \frac{n}{n-1}\sum_k (x_k - \bar{x})^2 \cdot f_k \cdot \Delta x \tag{12.18}$$

Der Index k durchläuft dabei die Intervalle, nicht die Messwerte.

12.5 Die Normalverteilung

Im Beispiel hat sich für die Stichprobe von 30 Messungen die empirische Häufigkeitsverteilung (Histogramm in Abb. 12.3) der Messwerte ergeben. Empirische Verteilungen sind immer diskret, ob es nun die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung auch ist oder nicht. Die Erfahrung zeigt, dass viele (nicht alle) empirisch gewonnenen Häufigkeitsverteilungen nicht zu unterscheiden sind von solchen, denen eine einzige Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt: die sogenannte **Normalverteilung**.

Zur Erklärung dieser Tatsache stellt C. F. Gauss die "Hypothese der Elementarfehler" auf. Danach setzt sich der gesamte Beobachtungsfehler der Einzelmessung aus einer grossen Zahl von unabhängigen kleinen Fehlern zusammen (zum Beispiel Schwankungen der Temperatur, mechanische Erschütterungen). Die beobachtete Grösse ist dann normal verteilt (als Folge des zentralen Grenzwertsatzes der Statistik). Die Normalverteilung ist eine kontinuierliche Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{12.19}$$

Diese Funktion heisst Gauss'sche Fehlerfunktion und ist in der Abbildung 12.4 abgebildet.

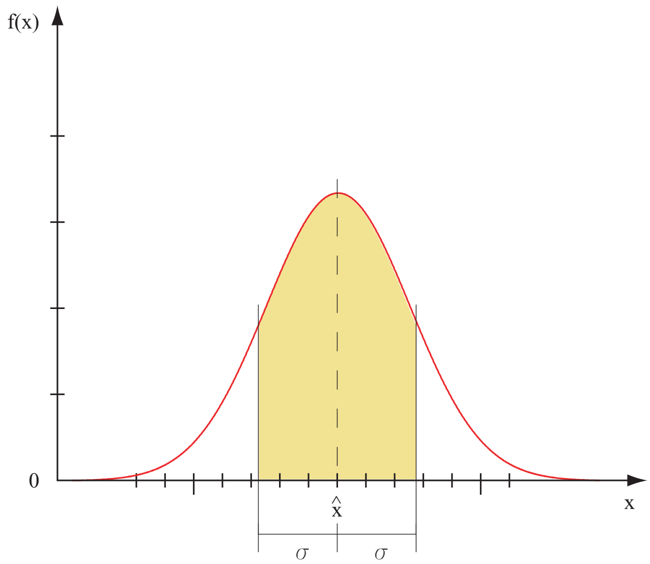

Abbildung 12.4: Gauss'sche Fehlerfunktion.

Für eine kontinuierliche Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ lauten die Definitionen für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\text{Erwartungswert} \quad \hat{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{12.20}$$

$$\text{Varianz} \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\hat{x})^2 f(x) dx \tag{12.21}$$

Die Wurzel aus der Varianz σ wird auch Standardabweichung genannt. Eine wichtige Eigenschaft der Normalverteilung ist die folgende: Sind x und y unabhängige und normal verteilte Zufallsgrössen, so ist $z = x + y$ eine Zufallsgrösse, die wiederum normal verteilt ist. Das ist verständlich, weil sich der Beobachtungsfehler von z aus den vielen Elementarfehlern von x und von y zusammensetzt. Für den Erwartungswert z und die Varianz σ_z^2 folgt aus den Gleichungen (12.7) und (12.8):

$$\hat{z} = \hat{x} \pm \hat{y} \tag{12.22}$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{12.23}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von x einen Wert zwischen a und b zu erhalten ist

$$P(a,b) = \int_a^b f(x) dx \tag{12.24}$$

In einer graphischen Darstellung von $f(x)$ ist $P(a,b)$ die von a und b begrenzte Fläche unter der Kurve. Die Grenzen der Fläche $P(\hat{x}-\sigma, \hat{x}+\sigma)$ sind in Abbildung 12.4 markiert. Tabelle 12.4 verzeichnet einige Werte von $P(a,b)$, die für die Normalverteilung wichtig sind.

$P(-\infty, +\infty)$	=	100 %	Die Wahrscheinlichkeit irgendeinen Wert zu messen ist 1
$P(\hat{x}-\sigma, \hat{x}+\sigma)$	=	68 %	Innerhalb $\pm$ eine Standardabweichung (siehe Abb. 12.4)
$P(\hat{x}-2\sigma, \hat{x}+2\sigma)$	=	95 %	Innerhalb $\pm$ zwei Standardabweichungen
$P(\hat{x}-3\sigma, \hat{x}+3\sigma)$	=	99.7 %	Innerhalb $\pm$ drei Standardabweichungen
$P(\hat{x}+3\sigma, +\infty)$	=	0.13 %	Messwerte grösser als $\hat{x}+3\sigma$ oder kleiner als $\hat{x}-3\sigma$ sind sehr unwahrscheinlich

Tabelle 12.4: Werte für $P(a,b)$ der Normalverteilung

Trifft die Hypothese der Elementarfehler zu und erhöht man die Anzahl der Messwerte, so nähert sich die diskrete Häufigkeitsverteilung der Messreihe immer mehr jener, die bei gleicher Intervallgrösse der Gauss'schen Fehlerfunktion entspricht. Gleichzeitig wird der Fehler der Einzelmessung s ein immer zuverlässigeres Mass für σ.
Aus $P(\hat{x}-\sigma, \hat{x}+\sigma) = 68\%$ folgt dann umgekehrt auch für die diskrete Messreihe, dass zirka 68% der Messwerte zwischen $\bar{x}-s$ und $\bar{x}+s$ liegen (Abb. 12.5).

12.6 Vergleich verschiedener Messungen und gewichtete Mittel

12.6.1 Unabhängige Messungen

Eine physikalische Grösse sei mit zwei unabhängigen Methoden gemessen, mit den Ergebnissen

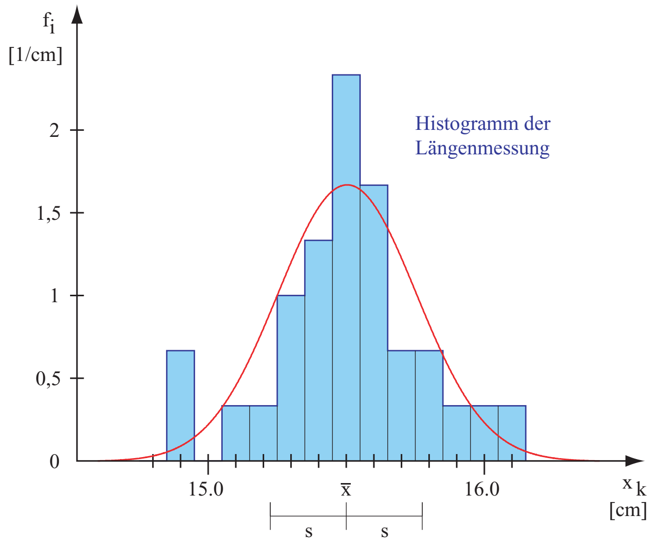

Abbildung 12.5: Vergleich von Abbildung 12.3 mit Abbildung 12.4.

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (\bar{x} \pm m_x) \\
G_2 &= (\bar{y} \pm m_y)
\end{aligned}
$$

Meistens ist x etwas verschieden von y. Somit stellt sich die Frage: "Ist $|\bar{x} - \bar{y}|$ eine zufällige Differenz oder unterscheiden sich die Erwartungswerte wirklich ?" Das letztere könnte bedeuten, dass mindestens eine der Messmethoden einen systematischen Fehler aufweist. Wir nehmen an, dass die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ normale Verteilungen haben mit Varianzen μ_x^2 und μ_y^2. Die Differenz $d = \bar{x} - \bar{y}$ hat dann eine Normalverteilung mit der Varianz $\sigma_d^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2$. Unter der Annahme $\hat{x} = \hat{y}$ sind demnach Differenzen $|d| > 3\sigma_d$ sehr unwahrscheinlich. Kommt eine so grosse Differenz d trotzdem vor, so wird man die Annahme $\hat{x} = \hat{y}$ verwerfen und die Differenz als gesichert betrachten.

Zwei Schwierigkeiten sind mit dieser Überlegung verknüpft: Einerseits sind die Varianzen μ_x^2 und μ_y^2 nicht genau bekannt, wohl aber die Fehler m_x und m_y, von denen man annehmen muss, dass sie aus hinreichend grossen Stichproben stammen. So mögen m_x^2 und m_y^2 als Näherung für μ_x^2 und μ_y^2 dienen. Andererseits liegt die Grenze für d nicht fest: soll man sie bei $2\sigma_d$, $3\sigma_d$ oder erst bei $4\sigma_d$ setzen? Ziehen wir die Grenze bei $3\sigma_d$ willkürlich, und bezeichnet $s_d = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ die Schätzung für σ_d, so lautet die Antwort auf die ursprüngliche Frage: Fällt $|\bar{x} - \bar{y}|$ grösser als $3s_d$ aus, so ist die Annahme eher zu verwerfen, dass die Erwartungswerte $\hat{x}$ und $\hat{y}$ gleich seien. Andernfalls ist es möglich, dass die Differenz zufällig ist und $\hat{x} = \hat{y}$ gilt. Das bedeutet aber nicht, dass die Hypothese $\hat{x} = \hat{y}$ richtig sei. Diese Sachlage ist typisch für die Prüfung von Hypothesen (zum Beispiel durch statistische Tests).

12.6.2 Der gewichtete Mittelwert und sein Fehler

Ist die physikalische Grösse y mehrmals mit unterschiedlicher Genauigkeit gemessen worden, so können die Ergebnisse $(y_i \pm m_{y_i})$ durch gewichtete Mittelwertbildung zu einem Mittelwert mit Fehler zusammengefasst werden. Dabei wird jedem Messwert ein Gewicht g_i umgekehrt proportional zu $m_{y_i}^2$ zugeordnet:

$$g_i \propto \frac{1}{m_{y_i}^2} \tag{12.25}$$

Folgende Formeln beschreiben das Verfahren:

$$g_i = \left(\frac{c}{m_{y_i}}\right)^2 \quad \text{Gewicht } (c > 0) \text{ frei wählbar} \tag{12.26}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{G}\sum_{i=1}^{n} g_i y_i, \qquad G = \sum_{i=1}^{n} g_i \quad \text{gewichteter Mittelwert} \tag{12.27}$$

$$m_y = \frac{c}{\sqrt{G}} \quad \text{Fehler des gewichteten Mittelwertes} \tag{12.28}$$

m_y ist immer kleiner als das kleinste m_y. Beim Rechnen kann c so gewählt werden, dass die g_i praktische Zahlenwerte haben.

12.6.3 Beispiel zum gewichteten Mittel

Gemessen wird die Brennweite einer dünnen Linse mit drei Methoden:

1. Durch Messen der Gegenstandsweite g und der Bildweite b: Aus der Abbildungsgleichung wird $f = gb/(g+b)$ berechnet. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz (Abschnitt 12.7) liefert den Fehler m_f aus den Fehlern von g und b, zum Beispiel $f_1 = (42.0 \pm 0.5)$ cm.
2. Durch Messen der Gegenstandsweite g und der Vergrösserung m: $f = mg/(m-l)$ mit dem Ergebnis: $f_2 = (40.8 \pm 0.3)$ cm.
3. Direkte Messung der Brennweite durch Autokollimation: $f_3 = (41.1 \pm 0.6)$ cm.

i	f_i	m_{f_i}	g_i
1	42.0	0.5	4
2	40.8	0.3	11
3	41.1	0.6	3
			$\sum g_i = 18$

Tabelle 12.5: Messresultate für die Brennweite einer Linse.

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ \bar{f} &= \frac{\sum g_i f_i}{\sum g_i} = 41.12 \text{ cm} \\ m_f &= \frac{1}{\sqrt{\sum g_i}} = 0.24 \text{ cm} \\ f &= (41.1 \pm 0.2)\ \text{cm} \end{aligned}$$

12.7 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

12.7.1 Allgemeine Definitionen

Es kommt häufig vor, dass die physikalische Grösse u, die zu bestimmen ist, nicht direkt gemessen wird. In solchen Fällen ist u eine bekannte Funktion $u(x, y, z, \ldots)$ mehrerer Variablen. Die Grössen $x, y, z, \ldots$ sind direkt gemessen mit den Fehlern m_x, m_y, m_z etc. Neben u betrachten wir die Funktion $v(x, y, z, \ldots)$

$$v = \hat{u} + a\,(x - \hat{x}) + b\,(y - \hat{y}) + c\,(z - \hat{z}) + \ldots \tag{12.29}$$

wobei

$$\hat{u} = u(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \ldots) \tag{12.30}$$

In einer kleinen Umgebung der Stelle $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)$ ist v eine brauchbare Näherung für die Funktion u. v ist eine Zufallsvariable, die aus der Summe der Zufallsvariablen $x, y, z, \ldots$ (zusammen mit konstanten Faktoren $a, b, c, \ldots$) gebildet ist. Sind diese unabhängig, so gilt als Verallgemeinerung der Gleichungen (12.7) und (12.8):

$$\begin{aligned} \hat{v} &= \hat{u} && (12.31)\\ \sigma_v^2 &= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + c^2\sigma_z^2 + \ldots && (12.32) \end{aligned}$$

In einer genügend grossen Stichprobe können die Erwartungswerte durch die Mittelwerte und die Standardabweichungen durch die Fehler ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{u} = u(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) && (12.33)\\ m_v &= m_u = \sqrt{a^2 m_x^2 + b^2 m_y^2 + c^2 m_z^2 + \ldots} && (12.34) \end{aligned}$$

Die Mathematik lehrt, dass die Konstanten a, b, c, ... gleich den partiellen Ableitungen $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, ... an der Stelle $(x, y, z, \ldots)$ sein müssen. Daraus folgt das **Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} m_z\right)^2 + \ldots} \tag{12.35}$$

Die partielle Ableitung $\partial u/\partial x$ gibt an, wie sich eine Änderung von x allein auf die Funktion $u(x, y, z, \ldots)$ auswirkt. Sie wird als gewöhnliche Ableitung von u nach x berechnet, wobei alle Variablen ausser x konstant gehalten werden.

12.7.2 Praktisches Rechnen mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

Das Fehlerfortpflanzungsgesetz gemäss Gleichung (12.35) bildet die Grundlage zur Berechnung der Fehler von Funktionswerten. Seine Anwendung ist oft kompliziert. In vielen Fällen führen daraus abgeleitete Regeln bequemer zum Ziel.

12.7.2.1 Vier einfache Beispiele und drei Regeln

Beispiel a) Berechnung vom Fehler einer Summe (oder einer Differenz):

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x \pm y \\ \text{Mittelwert:}\quad \bar{u} &= \bar{x} \pm \bar{y} \\ \text{Fehler:}\quad m_u^2 &= m_x^2 + m_y^2 && (12.36) \end{aligned}$$

Regel 1: Das Quadrat des Fehlers einer Summe (oder Differenz) ist die Quadratsumme der Fehler der Summanden.

Beispiel b) Berechnung vom Fehler eines Produktes (oder eines Quotienten):

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{xy}{z} \\ \text{Mittelwert:} \quad \bar{u} &= \frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{z}} \\ \text{Fehler:} \quad m_u^2 &= \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}} m_x\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}}{\bar{z}} m_y\right)^2 + \left(\frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{z}^2} m_z\right)^2 \end{aligned} \tag{12.37}$$

Der relative Fehler $r_u = m_u/\bar{u}$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} r_u^2 &= \frac{(m_u \bar{z})^2}{(\bar{x}\bar{y})^2} = \left(\frac{m_x}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{\bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{m_z}{\bar{z}}\right)^2 \\ r_u^2 &= r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \end{aligned} \tag{12.38}$$

Regel 2: Das Quadrat des relativen Fehlers eines Produktes (oder Quotienten) ist gleich der Quadratsumme der relativen Fehler der Faktoren.

Beispiel c) Berechnung vom Fehler einer Potenz:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^a, \qquad a \quad \text{konstant} \\ \text{Mittelwert:} \quad \bar{u} &= (\bar{x})^a \\ \text{Fehler:} \quad m_u &= \sqrt{\left(a\,(\bar{x})^{a-1}\, m_x\right)^2} \\ r_u &= \frac{m_u}{\bar{u}} = |a| \cdot \frac{m_x}{\bar{x}} = |a| r_x \end{aligned} \tag{12.39}$$

Regel 3: Der relative Fehler der Potenz x^a ist das $|a|$ -fache des relativen Fehlers von x.

Oft ist die Funktion $u(x, y, z, \ldots)$ bei näherem Betrachten die Summe von Produkten, deren Faktoren allenfalls konstante Exponenten haben. In diesem Fall können die Fehler von Teil-Ausdrücken mit den drei Regeln einfach berechnet werden. Bei Summen oder Differenzen rechnet man mit absoluten Fehlern (m), bei Produkten, Quotienten oder Potenzen mit relativen Fehlern (r).

Beispiel d) Berechnung vom Fehler einer komplizierteren Funktion:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -az + \frac{x}{y^2} = w(z) + v(x,y), \qquad a \quad \text{konstant} \\ r_v &= \sqrt{r_x^2 + (2r_y)^2} \\ m_v &= |\bar{v}| r_v \\ m_w &= |a| m_z \\ m_u &= \sqrt{m_v^2 + m_w^2} \end{aligned}$$

12.7.2.2 Ein kompliziertes Beispiel

$$u(x,y,z) = y^a \sin(x) + \ln z$$

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist:

$$\begin{aligned}
m^2_{\ln z} &= \left(\frac{m_z}{\bar{z}}\right)^2 = r_z^2 \\
m^2_{\sin x} &= (m_x \cos \bar{x})^2 \\
r_{\sin x} &= |\cot x| m_x
\end{aligned}$$

Achtung: m_x muss im Bogenmass eingesetzt werden!

$$r_y a = |a| r_y$$

Der relative Fehler des ersten Summanden ist:

$$r_1 = \sqrt{r_y^2 a + r^2_{\sin x}} = \sqrt{a^2 r_y^2 + (\cot \bar{x} m_x)^2}$$

mit dem absoluten Fehler

$$m_1 = |\bar{y}^a \sin \bar{x}| r_1$$

Der Fehler m_u von u wird schliesslich (nach der Regel für die Summe)

$$m_u = \sqrt{m_1^2 + m^2_{\ln z}}$$

Dazu das Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned}
a &= 3 \qquad x = (7.6 \pm 0.3) \quad \text{Grad} \qquad y = 4.74 \pm 0.05 \qquad z = 153 \pm 15 \\
\bar{u} &= 14.085 + 5.030 = 19.115 \\
m_{\ln z} &= 0.1 \qquad r_y a = 0.032 \\
r_{\sin x} &= 0.039 \qquad r_1 = \sqrt{(0.032)^2 + (0.039)^2} = 0.05 m_1 = 0.70 \\
m_u &= \sqrt{(0.7)^2 + (0.l)^2} = 0.71 \\
u &= (19.1 \pm 0.7)
\end{aligned}$$

12.8 Formelsammlung

12.8.1 Messungen gleicher Genauigkeit

Mittelwert gemäss Gleichung (12.12)

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Fehler des Mittelwerts (12.14)

$$m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Relativer Fehler (12.15)

$$r = \frac{m}{\bar{x}}$$

12.8.2 Messungen unterschiedlicher Genauigkeit

Gewichteter Mittelwert gemäss Gleichung (12.27)

$$\overline{y} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{n} g_i y_i$$

Gewichte (12.26)

$$g_i = \left(\frac{c}{m_{y_i}}\right)^2 \qquad G \equiv \sum_{i=1}^{n} g_i \qquad c > 0$$

Fehler des gewichteten Mittelwerts (12.28)

$$m_y = \frac{c}{\sqrt{G}}$$

12.8.3 Fehlerfortpflanzungsgesetz: Fehler von Funktionen

Funktion

$$u = u(x, y, z, \dots)$$

Mittelwert (12.33)

$$\overline{u} = u(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dots)$$

Fehler des Mittelwerts (12.35)

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} m_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_y\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} m_z\right)^2 + \dots}$$

Es gilt speziell (12.36)

$$u = x \pm y \quad \Rightarrow \quad m_u = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

und auch (12.38)

$$\{u = xy, \qquad u = \frac{x}{y}\} \quad \Rightarrow \quad r_u = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

sowie (12.39)

$$u = y^a \quad \Rightarrow \quad r_u = |a| \cdot r_y$$

12.8.4 Die Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine kontinuierliche Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Diese Funktion heisst Gauss'sche Fehlerfunktion und ist in der Abbildung 12.6 abgebildet.

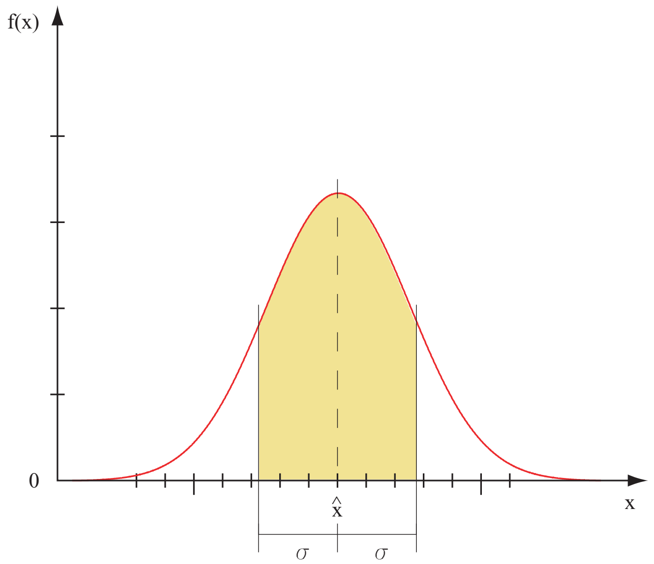

Abbildung 12.6: Gauss'sche Fehlerfunktion.

Für eine kontinuierliche Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ lauten die Definitionen für den Erwartungswert und die Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert} \qquad \hat{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ \text{Varianz} \qquad \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \hat{x})^2 f(x) dx \end{aligned}$$

Die Wurzel aus der Varianz σ wird auch Standardabweichung genannt.