

IU2

Modul Universalkonstanten

Gravitationskonstante

Neben der Formulierung seiner Bewegungsgesetze war ISAAC NEWTON's zweiter und vielleicht grösster Beitrag zur Physik die Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes. Es beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, Planeten oder auch kleineren Teilchen, die eine Bewegung hervorruft, welche durch die KEPLER'schen Gesetze beschrieben werden kann. Das Gesetz wurde 1666 von NEWTON formuliert und 1687 als Kapitel seines Monumentalwerks *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publiziert.

Versuch IU2 - Gravitationskonstante

Neben der Formulierung seiner Bewegungsgesetze war ISAAK NEWTON's zweiter und vielleicht grösster Beitrag zur Physik die Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes. Es beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, Planeten oder auch kleineren Teilchen, die eine Bewegung hervorruft, welche durch die KEPLER'schen Gesetze beschrieben werden kann. Das Gesetz wurde 1666 von NEWTON formuliert und 1687 als Kapitel seines Monumentalwerks *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* publiziert.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie ist Trägheit definiert?
- Was ist Torsion?
- Was ist das Drehmoment?
- Wie lautet die Einheit der Gravitationskonstanten?
- Wie funktioniert das Experiment nach Cavendish?
- Was ist eine harmonische Bewegung?
- Wie lautet die zugehörige Bewegungsgleichung?
- Was geschieht, wenn man einen Schacht durch den Erdmittelpunkt bohrt und einen Ball hinein wirft?

1.2 Theorie

1.2.1 Das Newton'sche Gravitationsgesetz

Das zweite KEPLER'sche Gesetz besagt, dass die Kraft, welche mit der Gravitationwechselwirkung assoziiert wird, eine Zentralkraft ist. Das heisst die Kraft wirkt längs einer Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten zweier wechselwirkender Körper. Wenn wir annehmen, dass die Gravitationswechselwirkung eine allgemeine Eigenschaft ist, muss andererseits die Kraft F , die mit der Wechselwirkung assoziiert wird, proportional zur „Menge“ an Materie in jedem Körper sein, d.h. proportional den entsprechenden Massen m_1 und m_2 . Wir können daher schreiben:

$$F = m_1 \cdot m_2 \cdot f(r) \quad (1.1)$$

Es ist schwierig, die Abhängigkeit der Kraft F von der Entfernung r zu bestimmen. Im Prinzip wird die Abhängigkeit experimentell bestimmt, indem die Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2 bei verschiedenen Entfernungen gemessen wird, wodurch die Beziehung zwischen F und r schliesslich abgeleitet werden kann. Eine solche experimentelle Bestimmung ist in der Tat möglich. Sie verlangt jedoch eine empfindliche Messapparatur und für AP-Verhältnisse relativ grosse Geduld.

NEWTON hatte jedoch keine solchen experimentellen Möglichkeiten. Er erkannte, motiviert durch die KEPLER-Gesetze, wie das Gravitationsgesetz beschaffen sein musste:

Die Gravitationswechselwirkung zwischen zwei Körpern kann durch eine zentrale Anziehungskraft ausgedrückt werden, die den Massen der Körper direkt proportional und dem Quadrat der Entfernungen zwischen ihnen umgekehrt proportional ist.

Oder etwas moderner ausgedrückt:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.2)$$

wobei γ die Proportionalitäts- oder Gravitationskonstante ist. Mit der Gleichung (1.2) sind jedoch die beiden wechselwirkenden Körper als Punktmassen zu verstehen. Für die Beschreibung der Planetenbahnen vernachlässigt man dabei die Ausdehnung der Planeten, da diese klein gegenüber den Radien der Planetenbahnen sind.

1.2.2 Das Experiment von Cavendish

Das Kernstück der Gravitationswaage nach Cavendish ist ein an einem dünnen Torsionsfaden waagrecht aufgehängter leichter Querbalken, der an jedem Ende im Abstand d zum Aufhängepunkt eine kleine Bleikugel der Masse m_2 trägt. Diese Kugeln werden von zwei grossen Bleikugeln der Masse m_1 gemäss Gleichung (1.2) angezogen. Obwohl diese Kraft weniger als 10^{-9}N beträgt, kann sie mit der extrem empfindlichen Torsionswaage nachgewiesen werden. Die Bewegung der kleinen Bleikugeln beobachtet und misst man über einen Lichtzeiger (siehe Abb. 1.1)

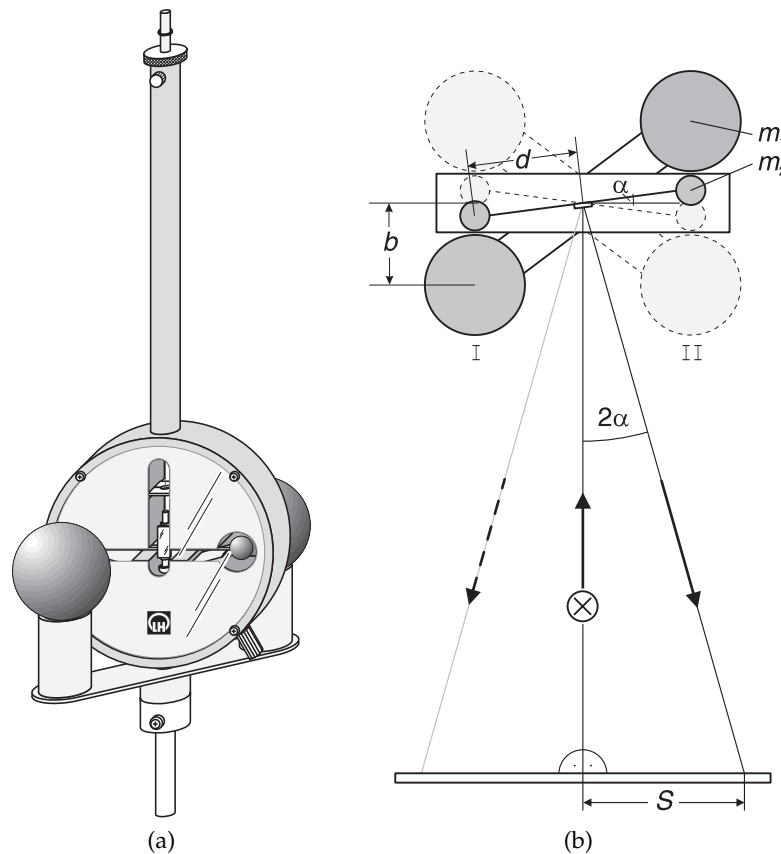


Abbildung 1.1: Gravitations-Drehwaage nach Cavendish (links) und schematische Darstellung des Lichtzeigers (rechts).

Dieser wird mit Hilfe eines beleuchteten Hohlspiegels erzeugt, der starr am Querbalken des Torsionspendels befestigt ist. Aus dem zeitlichen Verlauf der Bewegung, der Masse m_1 und der Geometrie der Anordnung ermittelt man dann die Gravitationskonstante anhand der im nächsten Abschnitt folgenden Überlegungen.

1.2.3 Bestimmung der Gravitationskonstanten

Die Gravitationskraft zwischen je zwei Bleikugeln der Masse m_1 und m_2 im Abstand b beträgt gemäss (1.2):

$$F_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} \quad (1.3)$$

Wenn sich die grossen Bleikugeln in der Position I befinden (Abb. 1.1), wirkt somit auf das Torsionspendel das Drehmoment

$$M_I = 2Fd = 2\gamma \frac{m_1 m_2}{b^2} d \quad (1.4)$$

Dieses wird nun kompensiert durch das Rückstellmoment des Torsionsfadens, so dass das Pendel die Gleichgewichtslage α_I einnimmt.

Durch Umschwenken der grossen Kugeln in Position II kehrt man nun die Kräfte symmetrisch um, so dass nun ein Drehmoment $M_{II} = -M_I$ wirksam ist und das Pendel gedämpfte Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage α_{II} ausführt. Die Differenz der beiden Drehmomente ist gegeben durch:

$$D(\alpha_I - \alpha_{II}) = M_I - M_{II} = 2M_I \quad (1.5)$$

wobei die Winkelrichtgrösse D aus der Schwingungsdauer T und dem Trägheitsmoment J des Torsionspendels bestimmt werden kann, gemäss:

$$D = J \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (1.6)$$

Das Trägheitsmoment ist nun mit dem Trägheitsmoment der beiden kleinen Kugeln gleichzusetzen:

$$J = 2m_2 d^2 \quad (1.7)$$

Somit ergibt sich für Gleichung (1.6):

$$D = m_2 d^2 \frac{8\pi^2}{T^2} \quad (1.8)$$

1.2.4 Messung des Drehwinkels α

In Abb. 1.1 ist die Messung des Drehwinkels α mit Hilfe des Lichtzeigers beschrieben. Der Beleuchtungsstrahl des Lichtzeigers steht hier senkrecht zur Nulllage des Torsionspendels (die Ruhelage ohne grosse Bleikugeln). Die Lichtzeigerposition für die Nulllage stimmt mit dem Skalennullpunkt überein. Zwischen dem Drehwinkel α , der Lichtzeigerposition S und dem Abstand L_0 zwischen Skala und Torsionspendel besteht der Zusammenhang:

$$\tan(2\alpha) = \frac{S}{L_0} \quad (1.9)$$

respektive für sehr kleine Winkel α :

$$\alpha = \frac{S}{2L_0} \quad (1.10)$$

In Abb. 1.2 wird der Hohlspiegel unter dem waagerechten Winkel β beleuchtet. Die Lichtzeigerposition O für die Nulllage des Torsionspendels hat den Abstand L_1 zum Aufpunkt N der Normalen und den Abstand

$$L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2} \quad (1.11)$$

zum Hohlspiegel. Für eine Drehung des Torsionspendels um den Winkel α aus der Nulllage findet man die Zusammenhänge:

$$S' = L \tan(2\alpha) \quad (1.12)$$

und

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin(90^\circ - \beta - 2\alpha)}{\sin(90^\circ + 2\alpha)} = \cos(\beta) - \tan(2\alpha) \sin(\beta) \quad (1.13)$$

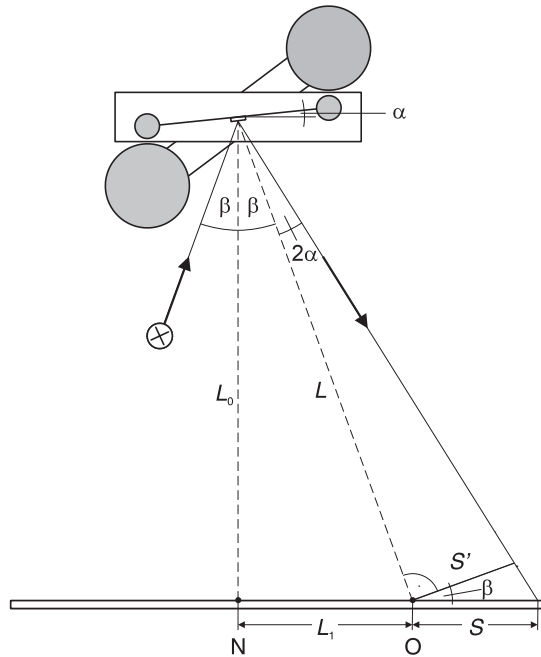


Abbildung 1.2: Schema zur Bestimmung der Auslenkung mit dem Lichtzeiger.

Der Winkel α ist in jedem Fall sehr klein (er beträgt höchstens 1.5°), die Abmessungen der Gravitations-Drehwaage lassen Beleuchtungswinkel β oberhalb 30° nicht zu. Daher ist die Näherung

$$\frac{S'}{S} = \cos(\beta) = \frac{L_0}{L} \quad (1.14)$$

zulässig. Mit der zusätzlichen Näherung $\tan(2\alpha) \approx 2\alpha$ folgt somit insgesamt

$$\alpha = \frac{S}{2} \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \quad (1.15)$$

Diese Gleichung (1.15) ist mit einem systematischen Fehler von $1 - 2\%$ behaftet, bei der Berechnung der Differenz der beiden Gleichgewichtslagen $\alpha_I - \alpha_{II}$ wird dieser systematische Fehler jedoch beinahe vollständig kompensiert.

Für den Spezialfall der Beleuchtung unter kleinen Winkeln β und für $L_0 \gg L_1$, erhält man aus Gleichung (1.15) die bereits hergeleitete Gleichung (1.10).

Gleichung (1.15) ist auch gültig, wenn der Beleuchtungsstrahl nach oben oder unten gekippt ist. Man richtet auch in diesem Fall die Ableseskala waagrecht aus und lässt Höhenänderungen des Lichtzeigers unberücksichtigt.

Die Nulllage des Torsionspendels, also der Punkt O in Abb. 1.2, ist in der Regel vor der Versuchsdurchführung nicht bekannt. Zur Bestimmung von L_1 misst man daher in guter Näherung den Abstand zwischen dem Normalenaufpunkt N und der Lichtzeigerposition für die Gleichgewichtslage I. Diese Näherung ist erlaubt, da $|\alpha| \ll 1$. Bei nicht zu schräger Beleuchtung des Hohlspiegels, also für $\beta \ll 1$, kann $L_1 = 0$ angenommen werden.

1.2.5 Gegendrehmoment der "zweiten" Bleikugel

Neben dem Drehmoment durch die Anziehungskraft F der jeweils unmittelbar gegenüberliegenden grossen Bleikugel (Abstand b) wird ein Gegendrehmoment durch die Anziehungskraft F_2 der jeweils entfernteren Kugel (Abstand d') erzeugt (siehe Abb. 1.3). Für das Drehmo-

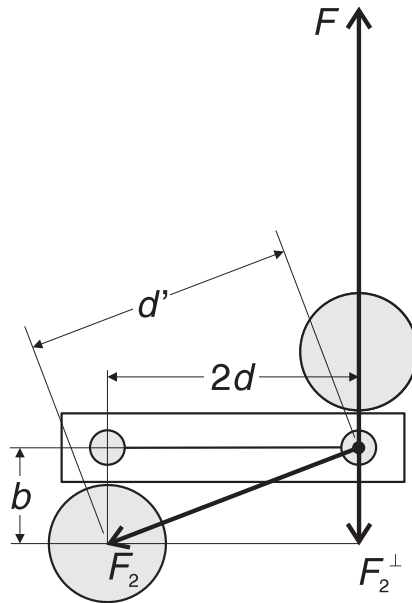


Abbildung 1.3: Schema zur Berechnung des Gegendrehmoments durch die "zweite" Bleikugel.

ment M_I gilt daher genauer als in (1.4) angegeben

$$M_I = 2(F + F_2^\perp)d \quad (1.16)$$

wobei

$$F_2^\perp = -F_2 \frac{b}{d'} \quad (1.17)$$

die senkrecht zum Querbalken angreifende Komponente der Kraft

$$F_2 = F \frac{b^2}{d'^2} \quad (1.18)$$

ist (siehe Gleichung (1.4)). Die Gravitationskonstante γ ist daher um den Korrekturfaktor

$$K = \frac{F}{F + F_2^\perp} = \frac{1}{1 - \frac{b^3}{d'^3}} \quad (1.19)$$

grösser. Mit

$$d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2} \quad (1.20)$$

lässt sich der Zahlenwert K berechnen.

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchsdaten

Grösse	Wert
Masse der grossen Kugeln	1500 g
Abstand der kleinen Kugeln vom Aufhängepunkt	4.94 cm
Abstand der kleinen Kugeln von der grossen Kugel	4.85 cm
Abstand des Aufhängepunktes des Fadens zum Massstab	277 cm

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

- Vor dem Auslenken die Anordnung mindestens zwei Stunden erschütterungsfrei stehen lassen, so dass das Pendel in die Gleichgewichtslage einschwenken kann.
- Stabilität des Nullpunktes kontrollieren.
- Nullpunktsschwankungen über mindestens 10min beobachten.

1.3.3 Messungen

Wichtig: Beim Umschwenken des Kugelträgers unbedingt Erschütterungen des Gehäuses etwa durch Anschlagen der Bleikugeln vermeiden.

- Laser einschalten und Startposition des Lichtzeigers notieren.
- Träger mit den Bleikugeln zügig aber vorsichtig von Position *I* in Position *II* schwenken und Stoppuhr starten.
- Stellung des Lichtzeigers auf der Skala während 30min mindestens alle 30s ablesen, bis die Schwingung nachgelassen hat.
- Warte etwa 60-90 Minuten, bis das System wieder im Gleichgewichtszustand ist.
- Notiere erneut die Startposition des Lichtzeigers.
- Den Träger mit den Bleikugeln von Position *II* in Position *I* zurückschwenken und Messung wiederholen.
- Den Träger mit den Bleikugeln senkrecht zum Gehäuse ausrichten, Kugel entfernen und Position der Nulllage messen.
- Träger für die nachfolgende Gruppe wieder vorsichtig in Position *I* bringen und Laser ausschalten.

1.3.4 Aufgaben zur Auswertung

- Bestimme die Periode und die Gleichgewichtslage beider Messreihen indem Du einen Fit der entsprechenden Funktion an die Daten durchführst.
- Bestimme die Gravitationskonstante, den Korrekturfaktor und die korrigierte Gravitationskonstante.
- Führe eine vollständige Fehlerrechnung durch.
- Vergleiche den Literaturwert mit Deinem Ergebnis.