

IU1

Modul Universalkonstanten

Erdbeschleunigung

Das Ziel des vorliegenden Versuches ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g aus der Fallzeit eines Körpers beim (fast) freien Fall durch die Luft.

Versuch IU1 - Erdbeschleunigung

Das Ziel des vorliegenden Versuches ist die Bestimmung der Erdbeschleunigung g aus der Fallzeit eines Körpers beim (fast) freien Fall durch die Luft.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie kann man die Erdbeschleunigung mit einem mathematischen Pendel bestimmen?
- Wie hängt die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels von der Erdbeschleunigung ab? Welche Annäherung ist notwendig?
- Wie hängt die Erdbeschleunigung von der Fallzeit und der Fallhöhe ab?
- Nenne Gründe, wieso die Erdbeschleunigung ortsabhängig ist.

1.2 Theorie

1.2.1 Das Fallexperiment

Die Newton'sche Bewegungsgleichung für den freien Fall eines Körpers im Gravitationsfeld lautet

$$F_G = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{d.h.} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g \quad (1.1)$$

Die wirkende Kraft ist also allein die Gewichtskraft $F_G = mg$ des Körpers.

Aus der Differentialgleichung $d^2s/dt^2 = g$ lässt sich durch Integration leicht der Zusammenhang zwischen Erdbeschleunigung g , Fallzeit T und Fallstrecke L berechnen.

In Wirklichkeit ist der Fall durch die Luft natürlich nicht ganz frei. Der Luftwiderstand wirkt der Beschleunigung entgegen. Die obige Bewegungsgleichung erhält daher einen zusätzlichen Term:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g - f(v) \quad (1.2)$$

Der Luftwiderstand wächst mit der Geschwindigkeit für relativ geringe Geschwindigkeiten linear und für hohe Geschwindigkeiten quadratisch an. Für unser Experiment kann man von hoher Geschwindigkeit sprechen und es gilt

$$f(v) = \beta v^2 \quad (1.3)$$

Wir wollen im Folgenden die Bewegungsgleichung des freien Falls unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g - \beta v^2$$

lösen. Dazu führen wir als erstes eine Trennung der Variablen durch, die dann einfach integriert werden kann.

$$dt = \frac{dv}{g - \beta v^2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_E} dt = \int_0^{v_E} \frac{dv}{g - \beta v^2}$$

Durch die Substitution $x^2 = \frac{\beta v^2}{g}$ erhalten wir daraus

$$t_E = \frac{1}{\sqrt{g\beta}} \int_0^{\sqrt{\frac{\beta}{g}} v_E} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{g\beta}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{\beta}{g}} v_E\right)$$

Verallgemeinern wir dieses Ergebnis für alle Zeiten und alle Geschwindigkeiten und lösen nach v auf, so ergibt sich

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \tanh(t\sqrt{g\beta})$$

Daraus erhalten wir die in der Zeit t zurückgelegte Strecke s einfach durch eine Integration über die Zeit (Substitution $x = t' \sqrt{g\beta}$)

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t v(t') dt' = \sqrt{\frac{g}{\beta}} \int_0^t \tanh(t' \sqrt{g\beta}) dt' \\ &= \frac{1}{\beta} \int_0^{t\sqrt{g\beta}} \tanh x dx = \frac{1}{\beta} \ln \cosh(t\sqrt{g\beta}) \end{aligned}$$

Wir haben also als Endergebnis erhalten

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{\beta} \ln \cosh(t\sqrt{g\beta})} \quad (1.4)$$

Für kleine Argumente $t\sqrt{g\beta}$ erhalten wir wieder den freien Fall durch die Näherungen

$$\begin{aligned} \cosh x &\approx 1 + \frac{1}{2}x^2, & \ln(1+y) &\approx y \\ \Rightarrow s(t) &\approx \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{2}t^2g\beta = \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

Komponente	Anzahl
Stahlkugel \varnothing 16mm	1
Haltemagnet	1
STE-Si-Diode N 4007	1
Gabellichtschranke	2
Verbindungskabel 6-polig	2
Digitalzähler	1
Stativfuss	1
Stativstange 150cm	1
Stativstange 25cm	1
Muffe	1
Höhenmassstab 1m	1
Sockel	1
Angelschnur	1
Laststücke	6
Experimentierkabel	1

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1.1, die Beschreibung des Haltemagneten in Abb. 1.2 dargestellt.

- Lange Stativstange mittels Stellschrauben am Stativfuss lotrecht ausrichten.

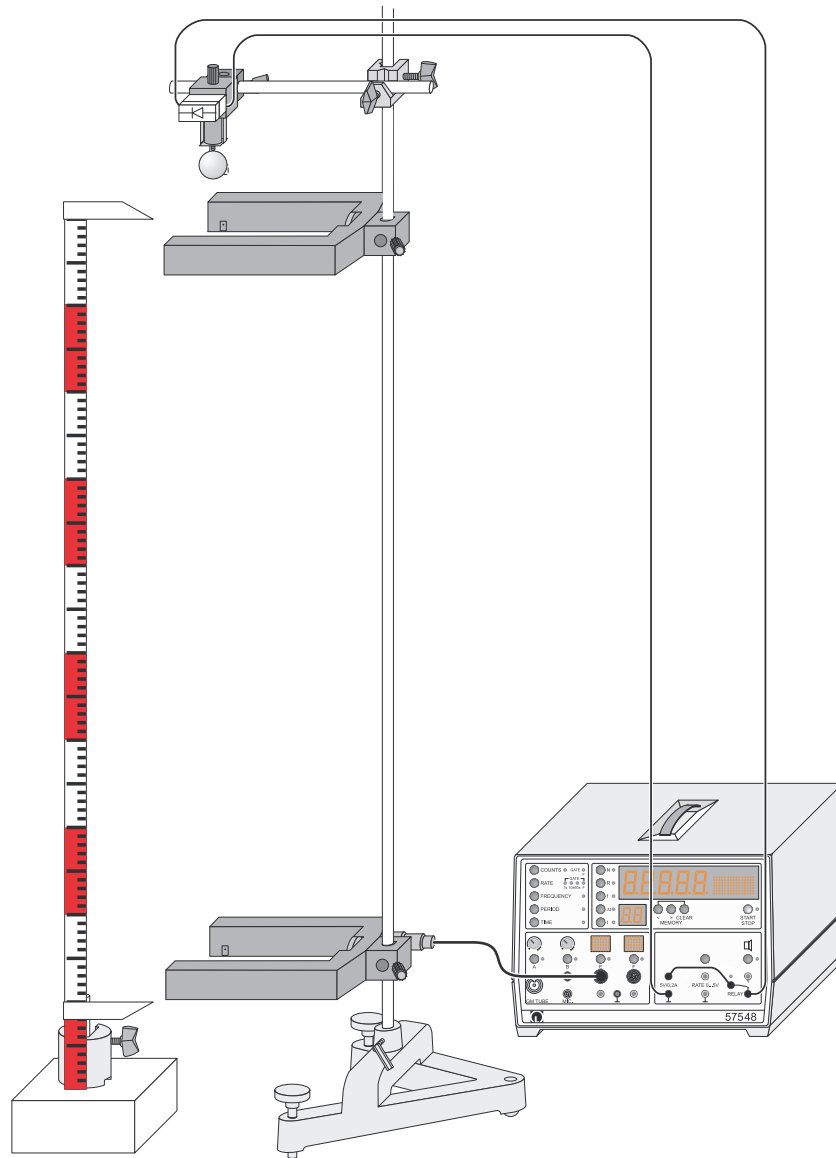


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau zur Messung der Fallzeit zwischen Haltemagnet und zwei Gabellichtschranken.

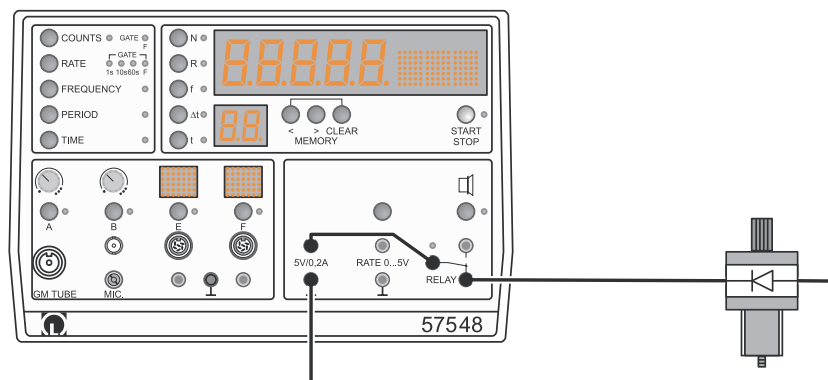


Abbildung 1.2: Beschaltung von Haltemagnet und Digitalzähler.

- Gabellichtschranken mit roter LED nach oben zeigend befestigen und über 6-poliges Verbindungskabel mit dem Eingang E und F des Digitalzählers verbinden.
- Kurze Stativstange mit Muffe montieren und Haltemagnet nach unten zeigend befestigen.
- Pluspol des 5V-Ausganges über Relais des Digitalzählers mit einer Buchse und Masseanschluss mit der zweiten Buchse des Haltemagneten verbinden und STE Si-Diode auf Eingang des Haltemagneten stecken (siehe Abb. 1.2).
- Digitalzähler einschalten und Taste Time (für Fallzeit in s) drücken.
- Taste E und F mehrmals drücken, bis jeweils die Anzeige $\downarrow \square$ erscheint.
- Stahlkugel an Magneten hängen.
- Obere Gabellichtschranke und Haltemagnet mit Stahlkugel exakt so ausrichten, dass die Lichtschranke durch die Unterkante der Stahlkugel unterbrochen wird (rote LED beobachten).
- Höhenmassstab mit Zeigern aufstellen und oberen Zeiger als Wegnullpunkt auf die Unterkante der oberen Gabellichtschranke ausrichten.

1.3.3 Messungen

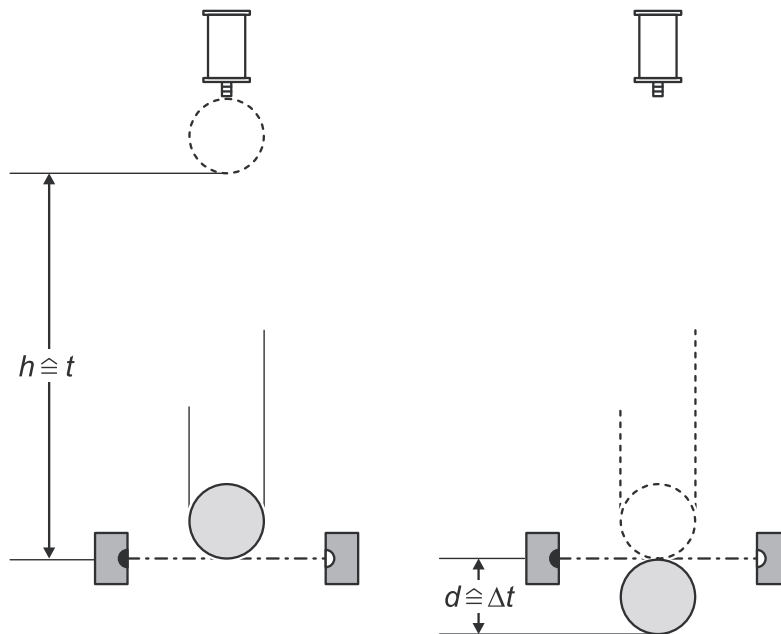


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung zur Messung der Fallzeit t und der Verdunkelungszeit Δt einer fallenden Kugel mit einer Lichtschranke.

- Obere Gabellichtschranke auf Fallstrecke 10cm und untere Gabellichtschranke zur Fallstrecke 40cm schieben.

- Rändelschraube des Haltemagneten ausschrauben, Angelschnur durchführen und am unteren Ende ein Laststück befestigen.
- Anordnung so justieren, dass beide Lichtschranken durch die Angelschnur unterbrochen werden.
- Angelschnur entfernen und Rändelschraube wieder einschrauben.
- Stahlkugel anhängen und Rändelschraube zurückdrehen, bis Stahlkugel gerade noch haftet (Markierung auf der Rändelschraube anbringen, um Einstellung reproduzieren zu können).
- Stahlkugel anhängen und Messung mit Taste START STOP starten.
- Taste START STOP erneut drücken, sobald die Kugel heruntergefallen ist.
- Fallzeit t in s ablesen und notieren.
- Taste Δt zweimal drücken und Verdunkelungszeit (siehe Abb. 1.3) Δt in ms ablesen und notieren.
- Auf Speicherabruf-taste " $<$ " drücken und zweites Wertepaar t und Δt ablesen und notieren.
- Messung von Fallzeit und Verdunkelungszeit 10mal wiederholen
- Untere Gabellichtschranke Fallstrecke 90cm schieben und gegebenenfalls mit Angelschnur die Justierung der Anordnung überprüfen
- Messungen für 5 weitere Fallstrecken wiederholen (variieren dazu nur die Fallhöhe der zweiten Lichtschranke zwischen 40cm und 90cm. Die der ersten Lichtschranke bleibt konstant 10cm).

1.3.4 Aufgaben zur Auswertung

- Berechne für alle gemessenen Größen den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes.
- Berechne aus der Bewegungsgleichung für den freien Fall die Fallstrecke als Funktion der Zeit.
- Bestimme mit Hilfe dieser Formel aus den gemachten Messungen die Erdbeschleunigung g für jede Fallhöhe und schätze die entsprechenden Unsicherheiten ab. Trage das experimentell bestimmte g mit Fehlerbalken als Funktion der Fallhöhe auf. Vergleiche mit dem Theoriewert aus Präzisionsmessungen und diskutiere die verschiedenen möglichen systematischen Abweichungen.
- Berechne aus allen Werten der Erdbeschleunigung den Mittelwert und die zugehörigen Fehler.
- Erstelle ein Diagramm der Fallstrecke zur ersten Lichtschranke, zur zweiten Lichtschranke und der Fallstrecke von der ersten zu der zweiten Lichtschranke als Funktion der Fallzeit.
- Erstelle ein Diagramm der momentanen Geschwindigkeit beim Durchqueren der beiden Lichtschranken.

- Erstelle ein Diagramm der drei vorherigen Fallstrecken als Funktion des Quadrates der Fallzeit und ermittle die daraus resultierende Erdbeschleunigung.
- Vergleiche die aus den beiden Methoden erhaltenen Erdbeschleunigungen.

1.4 Literatur

- W. Greiner, "*Klassische Mechanik*", Verlag Harri Deutsch
- D. Meschede, "*Gerthsen Physik*", Springer Verlag