IM3

Modul Mechanik

Maxwell'sches Rad

In dem vorliegenden Versuch soll die Energieerhaltung anhand des Maxwell'schen Rades untersucht werden. Das Maxwell'sche Rad ist ein Metallrad mit grossem Trägheitsmoment, das an seiner Achse beidseitig an einem Faden aufgehängt ist, an dem es abrollen kann. Während des Versuches wird potentielle Energie in kinetische Energie sowohl einer linearen als auch einer Rotationsbewegung umgewandelt.

Versuch IM3 - Maxwell'sches Rad

In dem vorliegenden Versuch soll die Energieerhaltung anhand des Maxwell'schen Rades untersucht werden. Das Maxwell'sche Rad ist ein Metallrad mit grossem Trägheitsmoment, das an seiner Achse beidseitig an einem Faden aufgehängt ist, an dem es abrollen kann. Während des Versuches wird potentielle Energie in kinetische Energie sowohl einer linearen als auch einer Rotationsbewegung umgewandelt.

©AP, Departement Physik, Universität Basel, November 2024

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie lautet die Definition des Trägheitsmomentes eines starren Körpers?
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel, eines Quaders und eines Zylinders.
- Wie ändert sich das Trägheitsmoment bei einer Verschiebung/Drehung der Achse?
- Welche Kraft wirkt auf die Aufhängung des Maxwellrades in den einzelnen Bewegungsphasen (Ruhe, Abrollen, Umkehrpunkt, Aufrollen)?
- Wovon hängt die Kraft am Umkehrpunkt ab?

1.2 Theorie

1.2.1 Ideales Maxwell'sches Rad

Beim Maxwell'schen Rad handelt es sich um ein an einer Schnur aufgehängtes Rad. Lässt man das Rad fallen, so fällt es langsamer als ein Rad gleicher Masse im freien Fall. Die potentielle Energie wird nicht nur in Translationsbewegung, sondern auch in Rotation umgesetzt. Um die Fallhöhe als Funktion von der Zeit herzuleiten, gibt es zwei Ansätze:

1. Ansatz über die Erhaltung von potentieller, kinetischer Translations- und kinetischer Rotationsenergie:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}}\right) = 0 \tag{1.1}$$
2. Ansatz über das Drehmoment. In Abbildung 1 ist ein Maxwell'sches Rad dargestellt. Es habe die Masse m und das Trägheitsmoment Θ. Aus der Newton'schen Mechanik

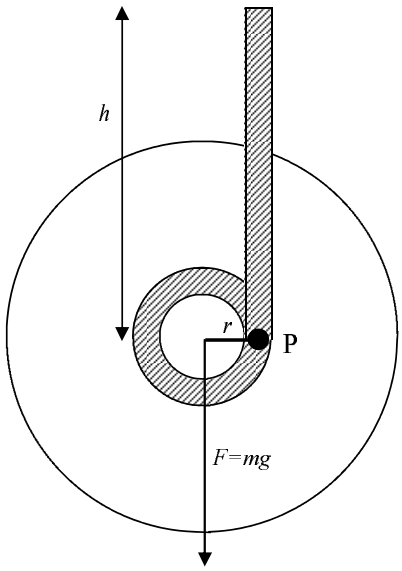

Abbildung 1.1: Maxwell'sches Rad

für Drehbewegungen und dem Drehmoment, das an der Schnur angreift, kann man die Lösung finden.

In beiden Fällen braucht man eine Zwangsbedingung, welche die Geschwindigkeit der Translationsbewegung $v(t)$ und Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung $\omega(t)$ miteinander verbindet. Wir verfolgen hier den ersten Ansatz und schreiben zunächst die Energien in (1.1) aus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgh(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}\Theta\omega^2(t)\right) = 0, \tag{1.2}$$

wobei g die Fallbeschleunigung und $h(t)$ die zurückgelegte Fallhöhe des Rades ist.
Der Mittelpunkt der Aufhängungsachse bewegt sich mit der Geschwindigkeit v nach unten. Um abzurollen, müssen sich Punkte, die sich auf der Oberfläche der Achse befinden, mit entgegengesetzter, aber im Betrag gleich grosser Geschwindigkeit bewegen. Mit anderen Worten, es gilt:

$$v = \omega r$$

Eingesetzt in (1.2) ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgh(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}\Theta\left(\frac{v}{r}\right)^2(t)\right) = 0 \tag{1.3}$$

Jetzt führen wir die Ableitung durch und verwenden $v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h$.
Nach zweimaliger Integration sollte die Lösung wie folgt aussehen:

$$h(t) = \frac{1}{2}\frac{mgr^2}{mr^2 + \Theta}t^2 \tag{1.4}$$

Aus der Gesamtenergie des Systems und dem Zusammenhang $v = \omega r$ folgt für das Trägheitsmoment

$$\Theta = mr^2\left(\frac{2gh}{v^2} - 1\right) \tag{1.5}$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

Komponente	Anzahl
Maxwell'sches Rad	1
Gabellichtschranke	1
Verbindungskabel, 1.5m, 6-polig	1
Zählgerät	1
Haltemagnetadapter mit Auslöser	1
Massstab mit Zeigern	1
Sockel	1
Muffenblock	1
Stativfuss	2
Stativstange 50cm	2
Stativstange 100cm	2
Muffe	4

1.3.2 Versuchsaufbau und Durchführung

- Positioniere den Höhenmassstab an einer geeigneten Stelle.
- Wähle zur Messung der Abrollzeit die Einstellung $t_{E\to F}$ am Zählgerät und betätige mit dem Maxwell'schen Rad den Magnetschalter.

- Initialisiere die Messung durch das Betätigen der START-Taste. Sobald das Rad vom Schalter gelöst wird, startet die Zeitmessung, bis sie beim Durchlaufen der Lichtschranke gestoppt wird.
- Notiere die Zeit und setze die Messung durch das Betätigen der RESET-Taste zurück.
- Wähle zur Messung der Zeit zum Durchlaufen der Lichtschranke die Einstellung $t_{E,F}$ am Zählgerät und betätige erneut mit dem Maxwell'schen Rad den Magnetschalter.
- Initialisiere wiederum die Messung durch das Betätigen der START-Taste. Wenn nun das Rad vom Schalter gelöst wird, wird die Zeit Δt gemessen, die benötigt wird, um die Lichtschranke zu durchlaufen.
- Notiere die Zeit und setze die Messung wiederum durch das Betätigen der RESET-Taste zurück.

Hinweis: Die Bestimmung der absoluten Position des Rades auf der Längenskala ist heikel. Überlege Dir, wie gross der Fehler ist und versuche, ihn zu minimieren.

1.3.3 Messungen

- Miss jeweils dreimal die Zeit, die das Maxwell'sche Rad benötigt, um die Höhe h zurückzulegen.
- Miss zudem dreimal die Zeit, die das Rad benötigt, um die Lichtschranke auf dieser Höhe zu durchlaufen.
- Wiederhole beide Messungen für 10 verschiedene Höhen.

1.3.4 Aufgaben zur Auswertung

- Bestimme den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwertes für alle gemessenen Zeiten.
- Berechne die momentane Geschwindigkeit auf der Höhe der Lichtschranke und führe eine Fehlerrechnung durch.
- Trage in einem Diagramm den zurückgelegten Weg und in einem anderen Diagramm die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit auf und führe für beide einen sinnvollen Fit durch.
- Berechne das Trägheitsmoment mittels Energieerhaltungssatz und führe eine Fehlerrechnung durch.
- Trage in einem Diagramm die potentielle Energie, die Rotationsenergie, die Translationsenergie und die gesamte kinetische Energie als Funktion der Zeit auf und untersuche, ob die Energieerhaltung erfüllt ist.