



Modul Mechanik

Luftkissentisch

Gegenstand dieses Versuches ist die Untersuchung der Kinematik und Dynamik in zwei Dimensionen bei vernachlässigbarer Reibung anhand des Luftkissentisches. Insbesondere soll die Impulserhaltung bei elastischen und inelastischen Stößen behandelt werden.

Versuch IM2 - Luftkissentisch

Gegenstand dieses Versuches ist die Untersuchung der Kinematik und Dynamik in zwei Dimensionen bei vernachlässigbarer Reibung anhand des Luftkissentisches. Insbesondere soll die Impulserhaltung bei elastischen und inelastischen Stößen behandelt werden.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Überlege Dir, welche die allgemeinsten Erhaltungssätze der Physik sind, für welche Größen und unter welchen Bedingungen gelten sie?
- Was ist ein Inertialsystem?
- Was ist eine konservative Kraft?
- Leite die Impulserhaltung aus den NEWTON'SCHEN AXIOMEN her.
- Was ist das Schwerpunktsystem und wie ist sein Schwerpunkt zu berechnen?

1.2 Theorie

1.2.1 Die Newton'schen Axiome

Die von ISAAC NEWTON bereits im Jahre 1687 formulierten Grundsätze der Bewegung, die *Newton'schen Axiome* (auch Newton'sche Prinzipien, Newton'schen Gesetze oder Grundgesetze der Bewegung genannt), bilden das Fundament der klassischen Mechanik. Im Rahmen moderner physikalischer Theorien wie der Quantenmechanik oder der Relativitätstheorie sind sie nicht uneingeschränkt gültig, doch kann mit ihnen innerhalb eines weit gefassten Gültigkeitsbereiches zulässige Vorhersagen getroffen werden.

1. Newton'sches Gesetz - *Lex Prima*

Das erste Newton'sche Gesetz, auch TRÄGHEITSPRINZIP genannt, beschreibt die Bewegung von physikalischen Körpern in Inertialsystemen unter der Abwesenheit von äusseren Kräften. Es besagt, dass ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation verharrt, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung des Zustands gezwungen wird. Unter diesen Voraussetzungen ist somit die Geschwindigkeit eines solchen Körpers sowohl in seinem Betrag als auch seiner Richtung konstant. Um eine Änderung des Bewegungszustandes zu erreichen, muss eine äussere Kraft (z.B. die Gravitationskraft) auf den Körper wirken.

2. Newton'sches Gesetz - *Lex Secunda*

Das zweite Newton'sche Axiom, das AKTIONSPRINZIP bildet die Grundlage für viele Bewegungsgleichungen der Mechanik. Nach ihm ist die Änderung der Bewegung der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt. Dieser Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegungsänderung wird formal als

$$\dot{\vec{v}} \propto \vec{F}$$

ausgedrückt, und wurde im Originalwerk von Newton bereits in Form der allgemein gültigen Formulierung

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

beschrieben. Seit 1750 ist die von Leonhard Euler formulierte Form

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

bekannt, die *Grundgleichung der Mechanik*, wobei \vec{a} die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit, die *Beschleunigung*, bezeichnet.

3. Newton'sches Gesetz - *Lex Tertia*

Das dritte Newton'sche Axiom, das WECHSELWIRKUNGSPRINZIP, besagt, dass Kräfte immer paarweise auftreten. Ein Körper 1, der auf einen anderen Körper 2 eine Kraft ausübt, erfährt stets eine gleich grosse, aber ihm entgegengerichtete Kraft vom anderen Körper ausgehend:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

In einem abgeschlossenen System ist somit die Summe der Kräfte gleich null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (1.2)$$

Das dritte Newton'sche Axiom ist auch gemeinhin bekannt als das Prinzip von *actio und reactio*. Die Voraussetzung einer Fernwirkung hat jedoch als Konsequenz, dass dieses Axiom in der zeitabhängigen Elektrodynamik, wie überhaupt in der Speziellen Relativitätstheorie, seine Allgemeingültigkeit verliert, und nur unter bestimmten Bedingungen zutrifft.

4. Newton'sches Gesetz - *Lex Quarta*

Das vierte Newton'sche Gesetz wurde erst später als Zusatz zu den Bewegungsgesetzen zu den Newton'schen Axiomen gezählt. Es beschreibt das Prinzip der ungestörten Überlagerung, das SUPERPOSITIONSPRINZIP DER KRÄFTE, und besagt, dass wenn auf einen Punkt oder einen starren Körper mehrere Kräfte wirken, diese sich vektoriell zu einer resultierenden Kraft addieren:

$$\vec{F}_{res} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.3)$$

Impulserhaltung

Der Impulserhaltungssatz ist ein fundamentaler Erhaltungssatz der Physik und besagt, dass der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System gleich bleibt, also konstant ist. Die Erhaltung des Impulses gilt in der klassischen Mechanik sowohl als in der Quantenmechanik und der speziellen Relativitätstheorie und ist unabhängig von der Erhaltung der Energie. Zur Beschreibung von Stossprozessen besagt der Satz, dass der Gesamtimpuls aller Stosspartner vor und nach dem Stoss identisch sein muss, sowohl beim *elastischen* (wenn die kinetische Energie beim Stoss erhalten bleibt), als auch beim *inelastischen Stoss* (wenn kinetische Energie beim Stoss verloren geht).

Die Impulserhaltung ist eine direkte Folgerung aus dem zweiten und dem dritten Newton'schen Axiom. Da die auf einen Körper wirkende Kraft gleich der zeitlichen Änderung des Impulses entspricht (zweites Newton'sches Axiom):

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

und es für jede Kraft (wenn keine äusseren Kräfte wirken¹) eine gleich grosse, ihr entgegengesetzte Gegenkraft gibt, ist die Summe dieser Kräfte somit null. Da dies für alle Kräfte gilt, ist auch die Vektorsumme aller im System wirkenden Kräfte null und somit auch die Änderung des Gesamtimpulses:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}} = 0 \quad (1.4)$$

¹Für den Impulserhaltungssatz ist diese Forderung, dass keine äusseren Kräfte wirken, nicht unbedingt notwendig. Vielmehr genügt bereits die schwächere Bedingung, dass die *Summe* der äusseren Kräfte null ist $\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext} = 0$. Somit müssen nicht die einzelnen äusseren Kräfte verschwinden, sondern lediglich deren Gesamtsumme.

Da die zeitliche Ableitung des Impulses verschwindet, ist der Impuls konstant, der Massenschwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit fort. Somit bewegt sich der Schwerpunkt eines Systems, wenn keine äusseren Kräfte wirken, mit konstanter Geschwindigkeit und Richtung.

Energieerhaltung

In der Newton'schen Mechanik ist die Summe aus kinetischer T und potentieller Energie V , $E = T + V$, im Falle einer Bewegung von Teilchen in einem konservativen Kraftfeld erhalten. Dabei ist der negative Gradient der potentiellen Energie, auch das Potential genannt, die Kraft:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Ein Teilchen, das sich in solch einem Kraftfeld mit der Zeit t auf einem beliebigen Weg $x(t)$ von einem Start- zu einem Zielpunkt bewegt, benötigt unabhängig vom Weg immer die gleiche Arbeit, gegeben durch die Differenz der potentiellen Energie an Start und Ziel.

Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz gilt somit:

$$m\ddot{x} = \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Multiplikation beider Seiten mit \dot{x} liefert:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} &= -(\vec{\nabla}V)\dot{x} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \\ &= -\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

Integration nach der Zeit führt zu der benötigten Arbeit entlang eines beliebigen, stetig differenzierbaren, Weges mit der jeweiligen potentiellen Energie V_1 am Start- und V_2 am Zielpunkt:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\dot{x}dt &= -\int_{V_1}^{V_2} dV \\ T_2 - T_1 &= -V_2 + V_1 \\ T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \end{aligned}$$

Somit ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie nach einer Bewegung des Körpers unverändert, die Gesamtenergie bleibt *erhalten*.

Schwerpunktsatz

Der Schwerpunktsatz besagt, dass sich der Schwerpunkt eines Systems mehrerer Körper wie ein Massenpunkt verhält, dessen Masse die Summe der Massen der einzelnen Körper ist und auf den die vektorielle Summe aller von aussen an den einzelnen Körpern angreifenden Kräfte wirkt.

Somit bewegt sich der Schwerpunkt unbeeinflusst von den inneren Kräften zwischen den einzelnen Körpern des Systems. Ist die Vektorsumme der äusseren Kräfte Null, so bewegt sich der Schwerpunkt kräftefrei und somit geradlinig und ohne Änderung seiner Geschwindigkeit (erstes Newton'sches Axiom).

Elastische Stöße

Bei einem idealen elastischen Stoß geht keine Energie verloren, anders als beim inelastischen Stoß. Beim elastischen Stoß gilt die Energie- und Impuls-erhaltung, das heißt die Summe der kinetischen Energien und der Impulse vor und nach dem Stoß sind äquivalent.

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \quad (1.5)$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \quad (1.6)$$

Diese zwei Gleichungen lassen sich mit etwas Aufwand nach v_1' und v_2' auflösen:

$$v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \quad (1.7)$$

$$v_2' = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \quad (1.8)$$

In Teil (b) von den Aufgaben sollen die verschiedenen Parameter wie die Massen und die Geschwindigkeiten geschickt gewählt werden um die gewünschten Ergebnisse zu erhalten.

Elastische Stöße

Bei einem inelastischen Stoß bewegen sich die beiden ursprünglichen Massen nach dem Stoß als ein Objekt fort. D.h. nach dem Stoß gibt es nur noch eine Masse und eine Geschwindigkeit. Die Gleichungen sehen daher etwas anders aus.

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v'^2 + \Delta E \quad (1.9)$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \quad (1.10)$$

$$v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (1.11)$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

- ① fester Fuss der Dreipunktauflage
- ② Stellschrauben für Zusatzfüße (zur Stabilisierung der mit der Dreipunktauflage ① / ③ erreichten Niveau-Einstellung)
- ③ Nivellierschrauben für Dreipunktauflage
- ④ Mulde für Metall-Registrierpapier
- ⑤ Netzteil zur Spannungsversorgung des Gebläses und der Registrierelektroden
- ⑤.1 Frequenzwähler 10Hz/50Hz für Nadelimpulse (an Registrier-Elektroden ⑫.5 und/oder ⑱)
- ⑤.2 Netzschalter mit Betriebsanzeigeleuchte
- ⑤.3 Halter mit Primärsicherung

- ⑤.4 Steckbuchse für Stromversorgungsmast ⑩
- ⑥ Spannleiste zum Einspannen des Registrier-Metallpapiers und zur elektrischen Kontaktgabe (Registrierstromkreis)
- ⑦ 4-mm-Buchsen, intern verbunden mit Spannleiste ⑥ und Netzteil (Registrierstromkreis)
- ⑧ Tastschalter zum Schliessen des Registrierstromkreises
- ⑨ Rolle Registrier-Metallpapier, 20m, 45cm breit
- ⑩ Versorgungsmast, steckbar in Buchse ⑤.4; mit 2 parallel geschalteten Buchsen zum Anschluss der Versorgungsleitungen ⑪ für 2 Gleiter ⑫. Höhe des Mastes über der Glasplatte: ca. 80cm
- ⑪ Versorgungskabel (2x), ca 85cm lang, zum Anschluss der vom Netzteil ⑤ gelieferten Spannungen am Gleiter ⑫.
- ⑫ Gleiter (2x) mit Gebläse zur Erzeugung des Luftkissens und mit schleifender Mittelpunkt-Elektrode zur Registrierung. (Durchmesser: ca. 10cm; Höhe: ca. 10cm; Masse: $937g \pm 1g$)
- ⑫.1 Buchse mit Stift für Versorgungskabel ⑪
- ⑫.2 Ein-Aus-Schalter für Gebläse
- ⑫.3 Buchse zum Anschluss der Zusatz-Elektrode ⑱; unabhängig von Stellung des Schalters ⑫.4 stets mit Registrierspannung belegt
- ⑫.4 Ein-Aus-Schalter für Registrierspannung an Mittelpunkt-Elektrode ⑫.5
- ⑫.5 Mittelpunkt-Elektrode; Registrierung bei geschlossenem Schalter ⑫.4 und gleichzeitig gedrücktem Taster ⑧
- ⑬ Zusatzmasse (2x, Masse: $501g \pm 1g$) für Gleiter ⑫
- ⑭ Elastischer Federring (2x) für Gleiter ⑫; an der Peripherie Halter für Zusatz-Elektrode ⑱ (Masse: $61g \pm 1g$)
- ⑮ unelastischer Haftring (2x) für Gleiter ⑫; an der Peripherie Halter für Zusatz-Elektrode ⑱ (Masse: $60g \pm 1g$)
- ⑯ Doppelring zur Kupplung von 2 Gleitern ⑫ mit 3 Haltern für Zusatz-Elektroden; 1 Halter verschiebbar (Trägheitsachse), 2 Halter fest (Peripherie)
- ⑰ Gummiband (ca. 3m) zur elastischen Kopplung von 2 Gleitern sowie zur elastischen Begrenzung der Experimentierfläche
- ⑱ Zusatz-Elektrode (2x) zum Einsetzen in die Halter ⑭, ⑮ und ⑯ als Peripherie-Elektrode oder Schwerpunkt-Elektrode; mit Kabel und Stecker zum Anschluss an Buchse ⑫.3
- ⑲ Standfuss mit Befestigungsring (Drehachse für Versuche zur Kreisbewegung)
- ⑳ Umlenkrolle mit Haftmagnet zum Ansetzen an Spannleiste ⑥; für Beschleunigungsversuche

- ②① 2 Unterlegklötze für Fuss ①, 1cm und 2cm hoch, \varnothing 3cm; zum Neigen des Tisches um etwa 1° , 2° und 3° (Schiefe Ebene)
- ②② Schnur zur Verbindung des Gleiters mit einer beschleunigenden Masse (über die Umlenkrolle ②①) oder mit dem Ring an der Drehachse von Standfuss ①⑨.

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

Horizontaljustierung

- Zusatzfüsse mit den Stellschrauben ② so weit anheben, dass der Tisch nur noch in Dreipunktauflage auf Fuss ① und den beiden, durch Schrauben ③ justierbaren Füßen steht.
- Einen Gleiter etwa in die Mitte des Tisches stellen und über Kabel ①① mit dem Versorgungsmast ①⑩ verbinden.
- Netzschalter ⑤.② eindrücken und Gebläse zur Erzeugung des Luftkissens an Schalter ⑫.② einschalten.
- Glasplatte durch Betätigen der Nivellierschrauben ③ horizontal ausrichten, so dass sich der Gleiter nicht bewegt.
- Nivellierschrauben ③ durch Kontermuttern fixieren.
- Nivellierschrauben ② für Stabilisierungsfüße langsam betätigen, bis diese sanft auf der Arbeitsfläche aufsetzen, ohne die vorher eingestellte Horizontal-Lage des Tisches zu beeinträchtigen (Kontrolle durch ruhenden Gleiter).
- Schrauben ② ebenfalls durch Kontern fixieren.

Vorbereitung der Gleiter

Wichtig: Montage der Zusatzteile am Gleiter nicht auf dem Luftkissentisch vornehmen!

- Gleiter ⑫ (ohne Kabel ①①) auf eine saubere Unterlage (z.B. Blatt Papier) stellen; je nach Versuchsbedingungen Zusatzmasse ⑬ und/oder elastischen Federring ⑭ bzw. unelastischen Haftring ⑮ bzw. Doppelring ⑯ über den Gleiter streifen und diesen so drehen, dass der Anschlagnocken am Gleiterboden in die Nut des Ringes einrastet.
- Bei gleichzeitiger Verwendung von Zusatzmasse ⑬ und Federring ⑭ (oder Haftring ⑮ oder Doppelring ⑯) zuerst Zusatzmasse montieren.
- Erforderlichenfalls Elektrode ⑱ in Halter einsetzen und an Buchse ⑫.③ anschliessen.

Wichtig: Gleitkörper grundsätzlich am Gleiter ⑫ und nicht an den zusätzlich montierten Teilen anfassen, um deren definierte Position nicht zu verändern.

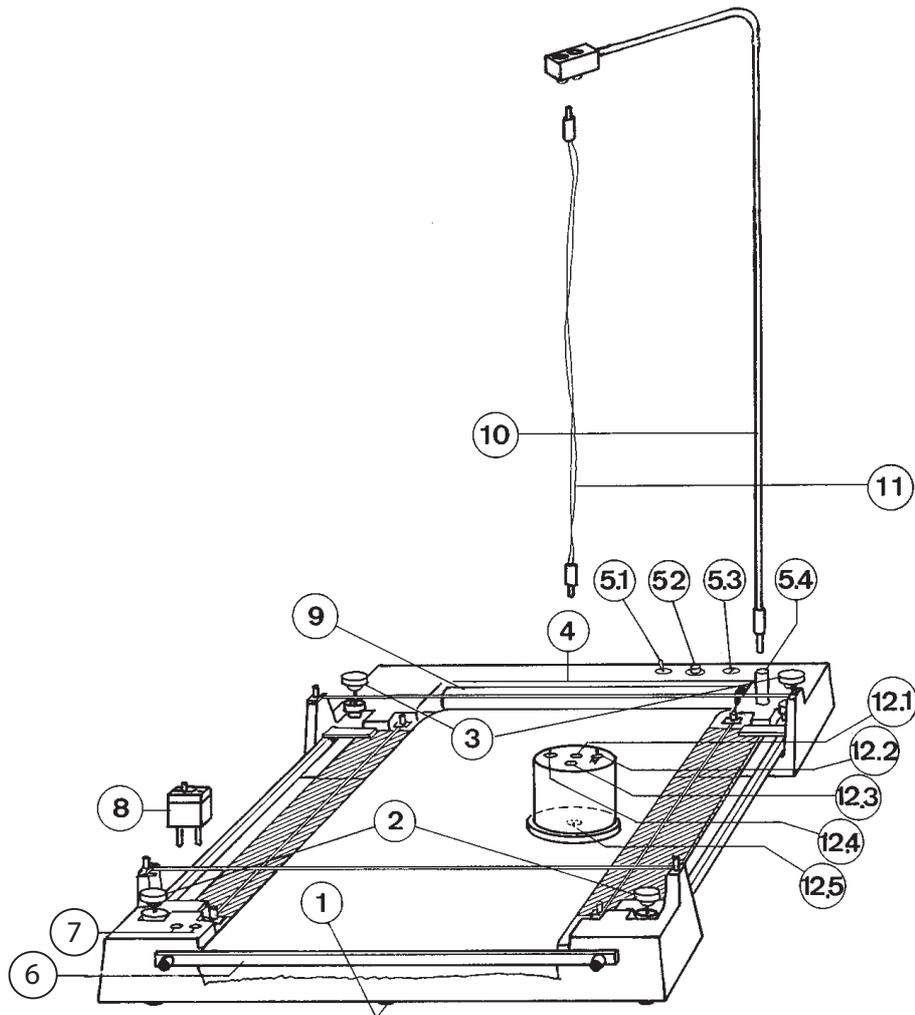


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau Luftkissentisch.

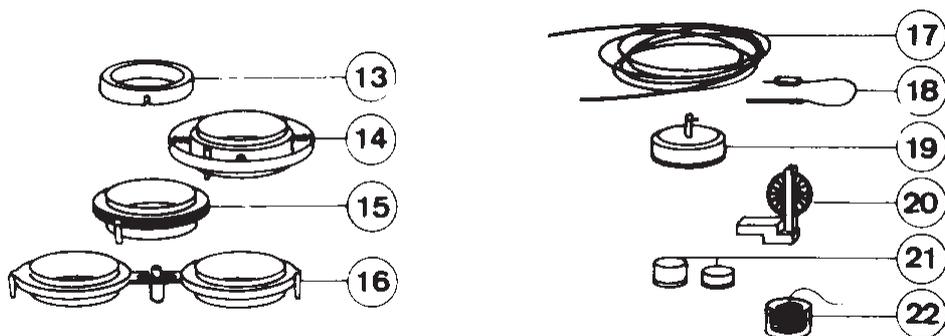


Abbildung 1.2: Zubehör zum Luftkissentisch.

Registrierung

- Netzschalter (5.2) eindrücken
- Frequenzwähler (5.1) auf 50Hz (für Markierungen in Zeitabständen von 0.02s) oder, bei sehr langsamen Bewegungen oder zur Vereinfachung der Auswertung, auf 10 Hz einstellen.

- Gebläse mit Schalter ⑫.② einschalten.
- Zur Registrierung mit Mittelpunkt-Elektrode ⑫.⑤ Schalter ⑫.④ schliessen; soll ausschliesslich mit der Zusatz-Elektrode ⑮ registriert werden, Schalter ⑫.④ öffnen.
- Gleiter in Bewegung setzen und zur Registrierung Taster ⑧ gedrückt halten.

Falls nach dem Betätigen der Registrierungs-Tasters ⑧ die Registrierung nicht funktioniert, muss der Kontakt des Metallpapiers zur Spanlleiste ⑥ überprüft und gegebenenfalls optimiert werden.

1.3.3 Aufgaben zur Auswertung

a) Schiefe Ebene - Beschleunigung durch Hangabtrieb

Komponente	Anzahl
Gleiter	1
Zusatzmasse	1
Ring für elastischen Stoss	1
Unterlegklotz 1cm	1
Unterlegklotz 2cm	1

Durchführung

- Luftkissentisch horizontal ausrichten (ohne Stabilisierungsfüsse aufzusetzen).
- Registrier-Frequenz 50Hz einstellen.
- Unterlegklotz unter den Festfuss der Dreipunktauflage schieben, um die schiefe Ebene herzustellen.
- Winkel α messen.
- Gleiter am erhöhten Ende der schiefen Ebene aufsetzen.
- Motor einschalten, Gleiter aber noch festhalten-
- Registrierknopf drücken, gleichzeitig Gleiter freigeben, ohne ihm einen zusätzlichen Impuls zu erteilen.
- Registrierknopf loslassen, wenn der Gleiter den Tisch durchlaufen hat.
- Mit anderem Unterlegklotz wiederholen.

Auswertung

- Messe einige Distanzen zwischen den Markierungen.
- Berechne für jeden gemessenen Punkt die Geschwindigkeit, den Impuls und die Energie.
- Erstelle für beide Messungen ein Weg-Zeit und ein Impuls-Zeit-Diagramm der beschleunigten Bewegung. (Ihr solltet 4 plots haben).
- Fitte passende Funktionen an die Graphen und berechne die Beschleunigung a aus den Parametern der Fits.
- Vergleiche deinen Wert mit dem Literatur -Wert $g = 9.81m/s$.

b) Elastischer Stoss

Komponente	Anzahl
Gleiter	2
Zusatzmasse	1
Ring für elastischen Stoss	2

Durchführung

- Luftkissentisch horizontal ausrichten.
- Registrier-Frequenz 50Hz einstellen.
- Gleiter anschliessen und Motoren einschalten.
- Die Gleiter gleichzeitig so anstossen, dass sie schräg gegeneinander laufen.
- Gleichzeitig mit der Registrierung beginnen, dann kurz unterbrechen und wiederum einschalten, um synchrone Registrierstriche erfassen zu können.

Aufgaben

- Setze $v_2 = 0$, ein Gleiter steht also still. Wähle nun die Massen m_1 und m_2 so, dass bei dem Stoss eine komplette Impulsübertragung stattfindet, d.h. nach dem Stoss steht der erste Gleiter still, $v_1' = 0$, und der zweite hat nun die gesamte kinetische Energie. Funktioniert das auch wenn $v_2 \neq 0$? Wieso? (Wenn ihr das erklären könnt müsst ihr nicht einen zusätzlichen Versuch machen. Falls nicht, macht einen und überprüft eure Hypothese).
- Ist es möglich, dass $v_1' > v_1$ nach dem Stoss? Wenn ja, welche Voraussetzung müssen erfüllt werden? Macht eine Messung und überprüft eure Hypothese.
- Was ist die maximale Geschwindigkeit die eine ruhende Masse $v_2 = 0$ erhalten kann durch einen elastischen Stoss? Was sind die Bedingungen? Demonstriere es in einem Versuch.

Auswertung

- Gebe jeweils die Voraussetzungen bei (ii) und (iii) an und nenne mögliche Gründe warum die Messung gut oder schlecht war.
- Überprüfe für alle Messungen die Impuls- und die Energie-erhaltung.

c) Inelastischer Stoss

Komponente	Anzahl
Gleiter	2
Zusatzmasse	2
Ring für inelastischen Stoss	2

Durchführung

- Luftkissentisch horizontal ausrichten.
- Registrier-Frequenz 50Hz einstellen.
- Beide Gleiter mit Zusatzmasse und Ring, für inelastische Stöße ausrüsten.
- Gleiter anschliessen und Motoren einschalten.
- Gleichzeitig mit der Registrierung beginnen.

Aufgaben

- Löse Gleichung 1.9 mit Hilfe von 1.11 nach ΔE auf. Was ist ΔE ? Ist die Energie beim inelastischen Stoss erhalten? Warum (Warum nicht)? Wo geht diese hin? Mache einen Versuch und zeige ob die Energie erhalten bleibt oder nicht.
- Ist es möglich, dass $v' = 0$? Wenn ja, welche Möglichkeiten gibt es? Demonstriere das in einem Versuch.

Auswertung

- Für (i) berechne das theoretische ΔE und vergleiche es mit eurem gemessenen Wert.
- Für alle Messungen überprüfe die Impuls- und die Energie-erhaltung.

1.4 Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, WILEY-VCH
- Goldstein, Poole & Safko, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley