



Modul Mechanik

Volumen- und Dichtebestimmung

Dichte und Volumen sind zwei wesentliche physikalische Größen im Umgang mit Stoffen eines beliebigen Aggregatzustands. In dem vorliegenden Versuch werden die üblichen Methoden zu deren Bestimmung im Falle einiger exemplarischer Festkörper, Flüssigkeiten und Gasen veranschaulicht.

Versuch IM1 - Volumen- und Dichtebestimmung

Dichte und Volumen sind zwei wesentliche physikalische Grössen im Umgang mit Stoffen eines beliebigen Aggregatzustands. In dem vorliegenden Versuch werden die üblichen Methoden zu deren Bestimmung im Falle einiger exemplarischer Festkörper, Flüssigkeiten und Gasen veranschaulicht.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Wie sind Festkörper, Flüssigkeiten und Gase definiert? Wo sind die Grenzen/Unterschiede? Wie können sie ineinander überführt werden?
- Wie sind Volumen, Masse und Dichte im allgemeinen Fall verknüpft? Welche Voraussetzungen müssen dazu gegebenfalls gegeben sein?
- Wie ist der Auftrieb definiert und wie kommt er zustande?
- Welche Größen kann man mit Hilfe des Auftriebs bestimmen?
- Was ist ein ideales Gas? Was ist der Unterschied zu einem realen Gas?

1.2 Einleitung

1.2.1 Volumen

DAS VOLUMEN V bezeichnet den räumlichen Inhalt eines geometrischen Körpers und hat die SI-Einheit m^3 . Für Flüssigkeiten und Gase wird gemeinhin die Einheit *Liter* l verwendet, wobei gilt: $1l=1\text{dm}^3$. Das Volumen hängt von der auf den Körper wirkenden Temperatur und Druck ab.

In der Geschichte der Menschheit wurden viele Methoden zur Bestimmung des Volumens verwendet. Nachstehend sind die gebräuchlichsten aufgelistet:

- **Wägen:** Ist die (ortsabhängige) Dichte eines Körpers bekannt, kann sein Volumen durch die Bestimmung seiner Masse mittels einer Waage ermittelt werden. Im Falle inhomogener Körper, von dem im Allgemeinen auszugehen ist, ist dies jedoch meist nur eine Näherung.
- **Auslitern:** Eine relativ simple und dennoch effektive Methode bietet dahingegen das sogenannte AUSLITERN. Diese Methode kann jedoch nur zur Bestimmung von Hohlvolumen, resp. Inhalten, verwendet werden. Der zu untersuchende Körper wird mit Sand oder Wasser gefüllt und die dabei verwendete Menge in einem Gefäß bekannten Volumens ermittelt.
- **Wasserverdrängung:** Eine zuverlässige und meist anwendbare Methode bietet die WASSERVERDRÄNGUNG. Dabei wird der zu untersuchende Körper in ein vollständig mit Wasser gefülltes Gefäß getaucht und das Volumen des verdrängten Wassers in einem Gefäß bekannten Volumens bestimmt.
- **Berechnen:** Handelt es sich um einen geometrisch einfach geformten Körper (Kugel, Quader, Zylinder, etc.), kann das Volumen berechnet werden, wenn die nötigen Dimensionen (Radius, Kantenlängen, etc.) des Körpers bekannt sind.

Da in diesem Versuch ebenfalls die Dichte der zu verwendenden Körper bestimmt werden soll und zudem keine Hohlkörper verwendet werden, bedienen wir uns der gängigsten Methoden, der WASSERVERDRÄNGUNG und der BERECHNUNG AUS GEOMETRISCHEN DIMENSIONEN.

1.2.2 Dichte

Die Dichte ρ gehört zu den Stoffkonstanten und ist eine physikalische Grösse, die den Stoff kennzeichnet, aus dem ein Körper besteht. Ihre SI-Einheit ist kg/m^3 . Sie ist lediglich durch das Material des betreffenden Körpers bestimmt und gänzlich unabhängig von seiner Grösse und Form. Der Begriff der Dichte darf nicht mit dem spezifischen Gewicht verwechselt werden. Während das spezifische Gewicht das Verhältnis der Gewichtskraft zum Volumen beschreibt, steht bei der Dichte die Masse im Verhältnis zum Volumen.

Betrachtet man *homogene* Körper, deren Massendichte in deren Inneren überall denselben Wert ρ hat, ist die Gesamtmasse m gegeben durch das Produkt von Dichte ρ und Volumen V , gemäss:

$$m = \rho V \quad (1.1)$$

Ist Volumen und Masse bekannt, kann aus diesem Zusammenhang einfach die Dichte bestimmt werden. Da, wie vorher erwähnt, das Volumen von Temperatur und Druck abhängt, ist auch die Dichte eine Funktion dieser beiden Grössen.

1.3 Theorie

1.3.1 Dichtebestimmung von Flüssigkeiten mit dem Pyknometer

Ein Pyknometer ist ein Gefäß, welches es ermöglicht, immer das genau gleiche Volumen einer Flüssigkeit abzufüllen. Es eignet sich daher besonders gut, die Dichte einer Flüssigkeit durch Vergleich mit einer Referenzflüssigkeit (mit bekannter Dichte) zu ermitteln. Da die Volumina identisch sind, reicht es die unterschiedlichen Massen zu bestimmen.

Bestimmung der Dichte OHNE Luftauftrieb

Zunächst wollen wir die *unkorrigierte* Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit bestimmen. Dabei sollen folgenden Bezeichnungen für die unkorrigierten Massen und die korrigierten Dichten gelten:

$$\begin{aligned} m_{Pm} &:= \text{Masse des leeren Pyknometers} \\ m_{Pm+H_2O} &:= \text{Masse des mit Wasser gefüllten Pyknometers} \\ m_{Pm+Fl} &:= \text{Masse des mit der Flüssigkeit gefüllten Pyknometers} \\ \rho_{H_2O} &:= \text{Dichte des Wassers} \\ \rho_{Fl} &:= \text{gesuchte Dichte der Flüssigkeit} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die Masse des Wassers ist somit $m_{Pm+H_2O} - m_{Pm}$, die der Flüssigkeit $m_{Pm+Fl} - m_{Pm}$. Damit ergibt sich die unkorrigierte Dichte der Flüssigkeit aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_{H_2O} &= \frac{m_{Pm+H_2O} - m_{Pm}}{v} \\ \rho_{Fl} &= \frac{m_{Pm+Fl} - m_{Pm}}{v} \end{aligned}$$

und auf Grund der Gleichheit der Volumina v zu:

$$\rho_{Fl} = \frac{m_{Pm+Fl} - m_{Pm}}{m_{Pm+H_2O} - m_{Pm}} \cdot \rho_{H_2O} \quad (1.3)$$

Bestimmung der Dichte MIT Luftauftrieb

Nun soll bei der Bestimmung der Dichte der Luftauftrieb mitberücksichtigt werden. Wir behalten dazu die obigen Bezeichnungen (1.2) bei. Alle Massen sind weiterhin als unkorrigiert zu betrachten, da sie ja in Luft bestimmt werden. Alle Dichten sollen jedoch von nun an als korrigiert gelten. Das Aussenvolumen des Pyknometers bezeichnen wir mit V , das Innenvolumen weiterhin mit v .

In die Gleichung für die im Experiment gemessene Masse m_{Pm+H_2O} gehen folgende Terme ein:

$$m_{Pm+H_2O} = \underbrace{v \cdot \rho_{H_2O}}_{\substack{\text{korrigierte Masse des} \\ \text{mit Wasser gefüllten} \\ \text{Innenvolumens}}} + \underbrace{(V - v) \cdot \rho_{Pm}}_{\substack{\text{korrigierte Masse des Py-} \\ \text{knometers}}} - \underbrace{V \cdot \rho_{Luft}}_{\text{Auftrieb}} \quad (1.4)$$

Man beachte, dass $V - v$, also das Aussen- minus das Innenvolumen, das Volumen des Materials darstellt, aus dem das Pyknometer besteht.

Analog zu Gleichung (1.4) ergeben sich für die Masse des mit der Flüssigkeit gefüllten Pyknometers m_{Pm+Fl} und für die Masse des leeren (also mit Luft gefüllten) Pyknometers die folgenden Gleichungen:

$$m_{Pm+Fl} = v \cdot \rho_{Fl} + (V - v) \cdot \rho_{Pm} - V \cdot \rho_{Luft} \quad (1.5)$$

$$m_{Pm} = v \cdot \rho_{Luft} + (V - v) \cdot \rho_{Pm} - V \cdot \rho_{Luft} \quad (1.6)$$

Umformen von Gleichung (1.6) gemäss:

$$(V - v) \cdot \rho_{Pm} = m_{Pm} + (V - v) \cdot \rho_{Luft}$$

und Einsetzen in (1.4) und (1.5) ergibt:

$$m_{Pm+H_2O} = v \cdot \rho_{H_2O} + m_{Pm} - v \cdot \rho_{Luft} \quad (1.7)$$

$$m_{Pm+Fl} = v \cdot \rho_{Fl} + m_{Pm} - v \cdot \rho_{Luft} \quad (1.8)$$

Die gesuchte Formel für die korrigierte Dichte der Flüssigkeit ρ_{Fl} kann nun aus (1.7) und (1.8) durch Umformung ermittelt werden:

$$\rho_{Fl} = \underbrace{\frac{m_{Pm+Fl} - m_{Pm}}{m_{Pm+H_2O} - m_{Pm}}}_{\substack{\text{unkorrigierte Dichte (1.3)}}} \cdot \rho_{H_2O} \left(1 - \frac{\rho_{Luft}}{\rho_{H_2O}} \right) + \rho_{Luft} \quad (1.9)$$

1.3.2 Berechnung der Dichte von Lösungen bei bekannter Ausgangsdichten

Im Folgenden soll die Dichte einer Lösung aus Wasser und der im vorigen Abschnitt verwendeten Flüssigkeit bestimmt werden, wenn die Dichten dieser Konstituenten gegeben sind. Dazu betrachten wir zuerst wieder den Fall ohne Luftauftrieb und korrigieren die Lösung dann mit der im vorigen Abschnitt bestimmten Korrektur. Da das Wasser nun nur noch einen Teil des Gesamt-Innenvolumens ausmacht, bezeichnen wir im Folgenden sein Volumen als V'_{H_2O} .

Die gesamte unkorrigierte Masse der Lösung ist gegeben durch

$$m_L = \rho_{Fl} V_{Fl} + \rho_{H_2O} V'_{H_2O} \quad (1.10)$$

Da sich bei einer idealen Lösung die Teilvolumina zum Gesamtvolumen addieren, folgt direkt für die Dichte der Lösung:

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{m_L}{V_L} = \frac{\rho_{Fl}V_{Fl} + \rho_{H_2O}V'_{H_2O}}{V_L} \\ &= \rho_{Fl} \cdot \frac{V_{Fl}}{V_{Fl} + V'_{H_2O}} + \rho_{H_2O} \cdot \left(1 - \frac{V_{Fl}}{V_{Fl} + V'_{H_2O}}\right) \\ &= \rho_{Fl} \cdot c + \rho_{H_2O} \cdot (1 - c)\end{aligned}\quad (1.11)$$

wobei $c = V_{Fl}/(V_{Fl} + V_{H_2O})$ die Volumenkonzentration der gelösten Flüssigkeit bezeichnet. Wenden wir noch die Korrektur zur Berücksichtigung des Luftauftriebs an, dann folgt für die Dichte der Lösung:

$$\rho_L = (\rho_{Fl} \cdot c + \rho_{H_2O} \cdot (1 - c)) \cdot \left(1 - \frac{\rho_{Luft}}{\rho_{H_2O}}\right) + \rho_{Luft}\quad (1.12)$$

Die Dichte der idealen Lösung hängt somit linear von der Volumenkonzentration c ab.

1.3.3 Dichtebestimmung von Luft mit dem Glaskolben

Gemäss Archimedes entspricht die Stärke des Auftriebs der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit (Gases), allerdings ist sie der Gewichtskraft entgegengesetzt. Sei g die Erdbeschleunigung, ρ_{Fl} die Dichte der verdrängten Flüssigkeit (des verdrängten Gases), dann erfährt ein Körper des Volumens V die Auftriebskraft:

$$F_A = g \cdot \rho_{Fl} \cdot V\quad (1.13)$$

In diesem Experiment wird ein Glaskolben mit einem Aussenvolumen V_a und einem Innenvolumen V_i verwendet. Ist er offen, so herrscht in ihm der Atmosphärendruck p_0 . Legt man ihn auf eine Waage, so misst man eine (Gewichts-) Kraft, die sich wie folgt zusammensetzt:

$$F_G^0 = g \cdot \left(\underbrace{\rho_g V_g}_{\text{Glas}} + \underbrace{\rho_0 V_i}_{\text{Luft}} - \underbrace{\rho_0 V_a}_{\text{Auftrieb}} \right)\quad (1.14)$$

Dabei sind:

$\rho_g V_g :=$ die Masse des Glaskörpers (im Vakuum)

$\rho_0 :=$ die Dichte der Luft beim vorherrschenden Atmosphärendruck p_0

Im nächsten Schritt wird im Kolben der Druck p_x erzeugt. Wiegt man den Kolben dann, so beträgt die (Gewichts-) Kraft:

$$F_G^x = g \cdot \left(\underbrace{\rho_g V_g}_{\text{Glas}} + \underbrace{\rho_x V_i}_{\text{Luft}} - \underbrace{\rho_0 V_a}_{\text{Auftrieb}} \right)\quad (1.15)$$

Aus der idealen Gasgleichung folgt für konstantes Volumen und konstante Temperatur:

$$\frac{p_x}{p_0} = \frac{\rho_x}{\rho_0}\quad (1.16)$$

Damit folgt für die Differenz aus (1.14) und (1.15):

$$F_G^0 - F_G^x = \rho_0 g V_i \left(1 - \frac{p_x}{p_0}\right)\quad (1.17)$$

Triviales Umformen liefert dann den Ausdruck zur Bestimmung der Dichte der Luft:

$$\rho_0 V_i \left(\frac{p_0 - p_x}{p_0}\right) = m_0 - m_x\quad (1.18)$$

wobei $m_0 - m_x$ die Differenz der Massen im Falle von Atmosphärendruck, bzw. Druck p_x ist.

1.4 Experiment

1.4.1 Versuchszubehör

Komponente	Anzahl
Würfel	2
Kugel	1
Messklotz	2
Standgefäß	1
Kunststoffrohr	3
Messzylinder	1
Kunststoffbecher 1000ml	1
Präzisions-Messschieber	1
Angelschnur	1

Volumen- und Dichtebestimmung an festen Stoffen.

Komponente	Anzahl
Pyknometer	1
Rührthermometer $-30^{\circ}\text{C} - +110^{\circ}\text{C}$	1
Messzylinder 100ml aus Glas	2
Ethanol (96%)	1

Dichtebestimmung an Flüssigkeiten mit dem Pyknometer.

Komponente	Anzahl
Kugel mit 2 Hähnen	1
Vakuum- und Druckhandpumpe	1
Untersettring für Rundkolben 250ml	1

Bestimmung der Dichte von Luft

1.4.2 Aufbau und Durchführung

Volumen- und Dichtebestimmung an festen Stoffen.

Der Versuchsaufbau ist in Fig. 1.1 dargestellt.

- Wasser in den Kunststoffbecher *c* (Fig. 1.1) einfüllen
- Standgefäß *a* so hinstellen, dass sich die Öffnung des Überlaufrohres mitten über dem Messzylinder *b* befindet.
- Wasser aus dem Kunststoffbecher *c* langsam in das Standgefäß *a* giessen, bis das Wasser über das Überlaufrohr in den Messzylinder *b* überläuft.
- Messzylinder *b* in den Kunststoffbecher *c* entleeren und wieder unter die Öffnung des Überlaufrohres stellen.

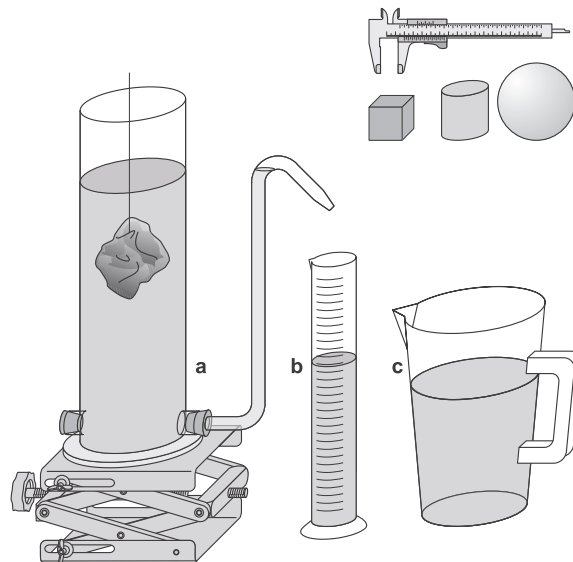


Abbildung 1.1: Versuchsaufbau zur Volumen- und Dichtebestimmung an festen Stoffen.

- Holzwürfel mit Präzisions-Messschieber an jeweils drei verschiedenen Stellen jeder benötigten Dimension messen und notieren.
- Masse des Holzwürfels bestimmen und notieren.
- Holzwürfel mit einem gebogenen Draht im Standgefäß vollständig unter Wasser drücken und übergelaufene Wassermenge bestimmen und notieren.
- Messungen an den restlichen Körpern wiederholen, dazu jeweils Wasser aus dem Kunststoffbecher nachfüllen, bis das Wasser über das Überlaufrohr in den Messzylinder überläuft, und Messzylinder entleeren

Dichtebestimmung an Flüssigkeiten mit dem Pyknometer

Der Versuchsaufbau ist in Fig. 1.2 dargestellt.

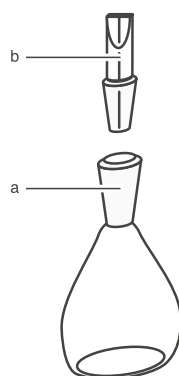


Abbildung 1.2: Versuchsaufbau zur Dichtebestimmung an Flüssigkeiten mit dem Pyknometer.

- Masse des leeren, trockenen Pyknometers bestimmen.

$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\text{g}/\text{cm}^3]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\text{g}/\text{cm}^3]$
15	0.999099	23	0.997540
16	0.998943	24	0.997299
17	0.998775	25	0.997047
18	0.998596	26	0.996785
19	0.998406	27	0.996515
20	0.998205	28	0.996235
21	0.997994	29	0.995946
22	0.997772	30	0.995649

Tabelle 1.1: Dichte des Wassers in Abhängigkeit der Temperatur.

$T[^\circ\text{C}]$	$\rho[\text{g}/\text{l}]$
10	1.2466
15	1.2250
20	1.2041
25	1.1839
30	1.1644
35	1.1455

Tabelle 1.2: Dichte der Luft in Abhängigkeit der Temperaturen.

- Pyknometer *a* (Fig. 1.2) bis zum unteren Drittel des Glasschliffes mit destilliertem Wasser auffüllen, Luftblasen entweichen lassen, Stopfen *b* (Fig. 1.2) vorsichtig aufsetzen und das durch die Bohrung austretende Wasser sorgfältig abwischen. Die Durchbohrung muss abschliessend bis oben gefüllt sein.
- Masse des mit Wasser gefüllten Pyknometers bestimmen.
- Wassertemperatur mit dem Thermometer bestimmen und Dichte des Wassers aus Tab. 1.1 ablesen.
- Lufttemperatur an der Wetterstation ablesen und aus Tab. 1.2 die Dichte entnehmen.
- Messung mit reinem Ethanol und anschliessend für 5 verschiedene Ethanol-Wasser-Lösungen wiederholen.
- Dazu jeweils Pyknometer sorgfältig reinigen, Pyknometer auffüllen, Luftblasen entweichen lassen und nach Aufsetzen des Stopfens darauf achten, dass die Durchbohrung bis oben gefüllt ist.
- Masse des gefüllten Pyknometers bestimmen und zusammen mit der Volumenkonzentration c des Ethanols notieren.

Zum Ansetzen einer Ethanol-Wasser-Lösung mit einer gewünschten Volumenkonzentration c des Ethanols geht man sinnvollerweise wie folgt vor:

- Messbecher 1 bis zum Volumen $V_1 = c \cdot 100\text{ml}$ mit Ethanol füllen.
- Messbecher 2 bis zum Volumen $V_2 = (1 - c) \cdot 100\text{ml}$ mit Wasser füllen.
- Beide Flüssigkeiten vorsichtig in einem Messbecher mischen.

Wichtig: Um sparsam mit den Flüssigkeiten umzugehen, ist es nur einmal notwendig, Ethanol einzufüllen. Später kann die Lösung durch hinzufügen von destilliertem Wasser verdünnt werden. Überlege Dir, wie dazu vorzugehen ist.

Wichtig: Ethanol und Ethanol-Lösungen nur in Behälter aus Glas geben. Behälter aus Kunststoff werden durch Lösungsmittel wie Ethanol beschädigt.

Bestimmung der Dichte von Luft

Der Versuchsaufbau ist in Fig. 1.3 dargestellt.

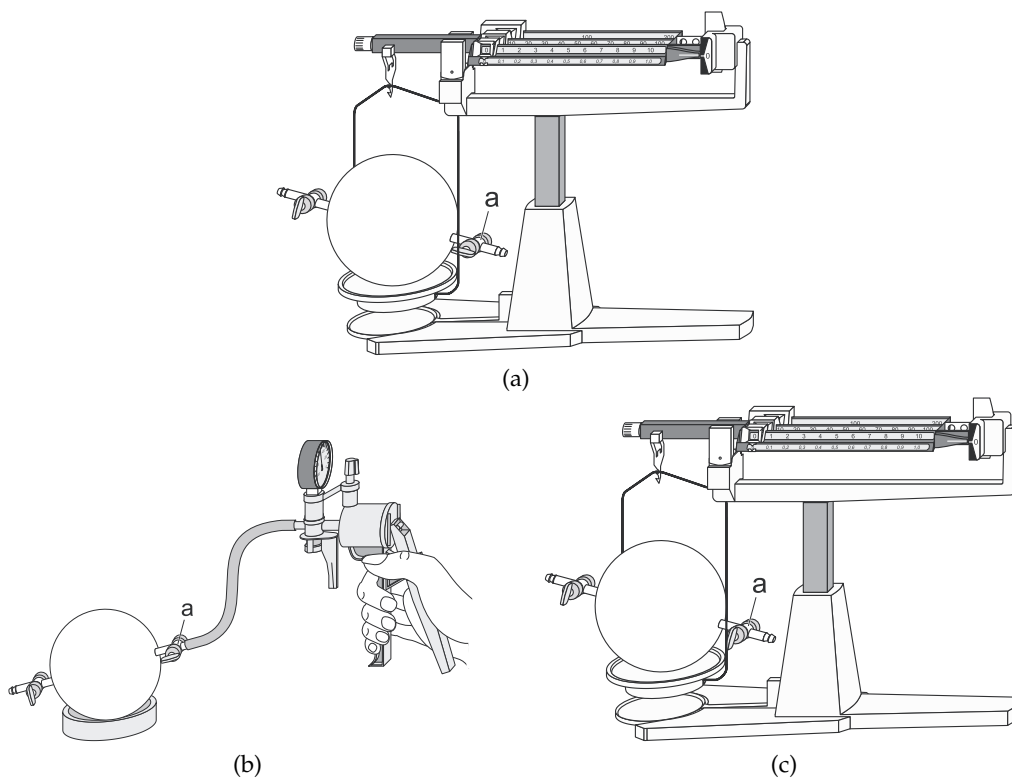


Abbildung 1.3: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Dichte von Luft.

Wichtig: Die Hähne der Glaskugel sind äusserst empfindlich. Äusserste Vorsicht ist daher beim Entfernen und Anbringen der Vakuumpumpe und Druckhandpumpe notwendig.

- Kugel mit 2 Hähnen auf die Waage legen, einen Hahn *a* öffnen und Gesamtmasse bestimmen (siehe Fig. 1.3 (a)).
- Vakuumpumpe und Druckhandpumpe anschliessen und die Kugel soweit wie möglich evakuieren. Die Vakuumpumpe und Druckhandpumpe zeigt jeweils die Druckdifferenz Δp zum äusseren Luftdruck an. (siehe Fig. 1.3 (b)). Der aktuelle Atmosphärendruck kann auf der Wetterstation abgelesen werden.

- Offenen Hahn a schliessen und Vakuum- und Druckhandpumpe vorsichtig entfernen (siehe Fig. 1.3 (c)).
- Die Kugel erneut auf die Waage legen und die Leermasse bestimmen.
- Vakuum- und Druckhandpumpe wieder vorsichtig anschliessen.
- Den anderen Hahn für kurze Zeit öffnen, so dass wieder etwas Luft hineinströmt.
- Hahn schliessen und Kugel erneut wägen.
- Prozedur für 5 weitere Werte wiederholen.

Reinige sämtliche Komponenten und räume den Arbeitsplatz auf.

1.5 Aufgaben zur Auswertung

Volumen- und Dichtebestimmung an festen Stoffen

- Bestimme für *alle* Körper das Volumen mit der Verdrängungsmethode.
- Berechne die Dichte der Probekörper aus dem so ermittelten Volumen und der gemessenen Masse.
- Berechne für jeden Körper aus den mit Hilfe des Präzisionsmessschiebers gemessenen Grössen den Mittelwert, Standardabweichung und Standardabweichung des Mittelwertes der relevanten Dimensionen.
- Berechne nun aus den gemessenen Dimensionen der Körper die Dichte und gib für jeden Körper das Ergebnis, den statistischen und den systematischen Fehler an.
- Vergleiche diese Ergebnisse aller Körper mit den durch die Verdrängungsmethode ermittelten Dichten.

Dichtebestimmung an Flüssigkeiten mit dem Pyknometer

- Bestimme die korrigierte Dichte von reinem Ethanol und vergleiche das Ergebnis mit einem Literaturwert.
- Bestimme für alle Ethanol-Wasser-Lösungen die korrigierte Dichte der Lösung.
- Gib eine sinnvolle Fehlerabschätzung für deine Ergebnisse an.
- Untersuche, ob der Luftauftrieb für die Messung eine wesentliche Rolle spielt. Vergleiche dazu die unkorrigierten (1.3) mit den korrigierten Werten der Dichte.
- Untersuche, wie die Dichte der Lösungen von der Volumenkonzentration abhängt. Trage dazu die Dichten gegen die Konzentration c in einem Graphen auf und führe einen sinnvollen Fit durch.
- Vergleiche die aus der Messung erhaltene korrigiert Dichte der Lösung mit den aus Gleichung (1.12) berechneten Werten, indem du Gleichung (1.12) ebenfalls in dem selben Graphen darstellst. Erkläre deine Beobachtungen.

Bestimmung der Dichte von Luft

- Stelle in einem Diagramm das Wertepaar bei Atmosphärendruck (m_0, p_0) als Referenzwert und die anderen Wertepaare m_x, p_x dar, indem Du $m_0 - m_x$ gegen $(p_0 - p_x)/p_0$ aufträgst. Überlege Dir, wie man aus dem resultierenden Graphen die Dichte der Luft bestimmen kann.
- Erstelle weitere Diagramme für jeden der Druck-/ Massenwerte, indem Du jedes Wertepaar m_x, p_x einmal als Referenz verwendest und gegen die anderen aufträgst. Bestimme aus diesen Diagrammen die restlichen Dichten ρ_x
- Gib eine sinnvolle Fehlerabschätzung für die bestimmten Dichten an.
- Trage in einem Diagramm die Dichte als Funktion des Druckes auf, führe einen Fit durch und füge den Literaturwert der Dichte bei Normalbedingungen hinzu.