

II Z2

Modul Elektrizitätslehre

Filter

In diesem Versuch geht es um die Eigenschaften und Funktionsweise elektronischer Filter. Weiter sollen mit Hilfe der Simulationssoftware *LT-spice* auch diverse Gesetze der Wechselstromlehre überprüft werden.

Versuch IIZ2 - Filter

In diesem Versuch geht es um die Eigenschaften und Funktionsweise elektronischer Filter. Weiter sollen mit Hilfe der Simulationssoftware *LTspice* auch diverse Gesetze der Wechselstromlehre überprüft werden.

1.1 Einleitung

Nachdem wir uns mit Schwingungen im Allgemeinen an Hand der Pendelversuche *IF0 Fehleranalyse* und *IZ2 Beschleunigte Bewegungen* vertraut gemacht haben, und seit *IZ1 Schallwellen* mit Pegeldiagrammen und Spektren umgehen können, wird es nun Zeit, dieses erarbeitete Wissen über Schwingungen in die Elektronik zu übertragen.

Vielleicht hast du dich schon mal gefragt, warum das Radio genau deine Lieblingsmusik spielt, und nicht was anderes. Klar, weil du den richtigen Sender auswählst, indem du die Frequenz korrekt einstellst. Wie aber funktioniert das, dass nur genau deine Musik aus all diesen unzähligen Frequenzen «extrahiert» wird? Die Lösung sind elektronische Filter, welche in unserem Alltag eine sehr grosse Bedeutung haben. Wir finden sie in den vielfältigsten Anwendungen, so zum Beispiel im

- Mobilfunk, wo eine bestimmte Sendefrequenz ausgewählt und empfangen werden soll, während alle anderen Frequenzen herausgefiltert werden müssen;
- Hör- und Rundfunk, wo analog zum Mobiltelefon nur bestimmte Radio- oder Fernseh-Frequenzen empfangen werden sollen, um einen bestimmten Kanal zu hören/schauen;
- Lautsprecher, wo eine Lautsprecherweiche dafür sorgt, dass die verschieden hohen Töne für Höhen-, Mittel- und Tiefenton an unterschiedliche Lautsprecher weiter gegeben werden (siehe Aufbau eines Lautsprechers);
- GPS, wo verschiedene Satelliten Signale in unterschiedlichen Frequenzen senden. Ein Überlagerungsempfänger mit Bandpassfilter filtert die relevanten Signale raus, wodurch die Position bestimmt werden kann;
- Internetsignal über ADSL, welches derart gekoppelt wird, dass über eine Kabelleitung telefoniert werden kann und über die selbe Leitung zeitgleich im Internet von verschiedenen Nutzern Daten hoch- oder heruntergeladen werden können.

Diese kleinen Filter, die vom Handy bis zur Mikrowelle, vom Kopfhörer bis bis zum Supercomputer, vom Navigationsgerät bis zum Satelliten, vom Auto bis zum Flugzeug überall verbaut sind, werden in diesem Versuch genauer betrachtet, vermessen und getestet. Ziel ist es zu verstehen, wie simple Hochpass- und Tiefpassfilter sowie Bandsperr- und Bandpassfilter funktionieren.

Es folgt zuerst eine theoretische Einführung in die Wechselstromlehre und eine generelle Erklärung zu passiven Bauteilen in der Elektrotechnik wie Widerständen, Kondensatoren und Spulen. Es werden Netzwerke angeschaut, insbesondere die Konzepte der Serie- und Parallelschaltung verdeutlicht und schliesslich Schwingkreise eingeführt, die als elektronische Filter eingesetzt werden. Um diese vergleichen zu können werden die Kriterien *Resonanz*, *Güte*, *Grenzfrequenz* und *Roll-Off* definiert und die Einheit Dezibel eingeführt.

Im praktischen Teil sollen mit Hilfe der kostenlosen Simulationssoftware *LTspice* einzelne Filter nachgebaut, getestet und vermessen werden. Die so gewonnenen Messdaten können dazu genutzt werden, um die zuvor behandelte Theorie über Schwingkreise zu überprüfen.

Diese Versuchsanleitung ist stark an diejenige des physikalischen Praktikums der ETH Zürich zum Thema Wechselströme angelehnt. Diverse Abbildungen sind dieser Anleitung entliehen.

1.2 Fragen zur Vorbereitung

Die nachfolgenden Fragen zur Vorbereitung sind schriftlich im Protokoll zu beantworten. Schreibe dazu höchstens zwei bis drei Sätze zu jeder Frage.

- Wo finden elektronische Filter Anwendung?
- Was versteht man in der Elektronik unter einem linearen Element, was unter einem passiven Element?
- Wie sind Effektivwert und Amplitude von Wechselstrom und Wechselspannung definiert?
- Was besagen die Kirchhoff'schen Gesetze?
- Weshalb sagt man bei Spulen, die Spannung eilt dem Strom um $\pi/2$ voraus? Und weshalb eilt bei Kondensatoren der Strom der Spannung um $\pi/2$ voraus? Warum ist das jeweils unabhängig von der Kreisfrequenz ω ?
- Warum kann man bei Serienschaltungen die Impedanzen addieren, bei Parallelschaltungen hingegen die Leitwerte?
- Was macht ein Hochpassfilter, was ein Tiefpassfilter? Wofür verwendet man einen Bandsperr- und Bandpassfilter?
- Was passiert im Zustand der Resonanz? Wie gross ist im Resonanzfall der Blindwiderstand?
- Weshalb können Stromüberhöhungen bzw. Spannungsüberhöhungen zu Problemen führen?
- Weshalb verwendet man beim Bau simpler Hochpass- bzw. Tiefpassfilter zumeist eine Kombination aus einem Widerstand und einem Kondensator, und keine Spule?
- Phasenverschiebung, Scheinwiderstand, Scheitelspannung und Kreisfrequenz: Welche dieser Grössen hängen vom Verbraucher, welche von der Wechselspannungsquelle ab?
- Weshalb verhält sich ein RLC -Serienschwingkreis bei hohen Frequenzen wie eine Spule und bei tiefen Frequenzen wie ein Kondensator? Wie sieht das bei einem RLC -Parallelschwingkreis aus?

1.3 Theorie

1.3.1 Wechselstrom

Bewegen sich elektrische Ladungen, so spricht man von einem Strom. Bei Gleichstrom ändert sich die Stromstärke mit der Zeit nicht, es gilt $I(t) = \text{const.}$ Dies lässt sich beobachten, wenn man beispielsweise eine Last an eine Batterie oder eine Solarzelle anhängt.

In der Technik ist der Wechselstrom mit zeitlich veränderlichen Strömen $I(t)$ deutlich bedeutender als der Gleichstrom.

Wechselströme können periodisch oder unperiodisch sein (siehe Analogie zu Tönen, Klängen und Geräuschen). Periodische Beispiele wären sinusförmige Wechselströme, Rechteckströme oder Sägezahnströme (siehe Abbildung 1.1 rechts).

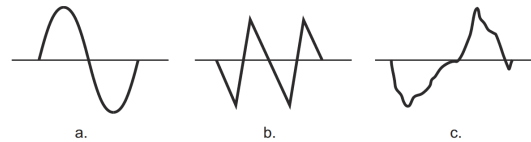


Abbildung 1.1: (a) ist ein sinusförmiger, (b) ein sägezahnförmiger und (c) ein nicht periodischer Wechselstrom.

Der sinusförmige Wechselstrom aus Abbildung 1.1 (a) ist ideal für die elektrische Energieübertragung über grosse Distanzen, da er sich leicht transformieren lässt und damit Energieverluste klein sind. Für Messzwecke ist oft eine Kippschwingung von Vorteil, welche periodisch, aber nicht sinusförmig ist. Häufig werden hierfür in Abbildung 1.1 (b) dargestellte sägezahnförmige Wechselströme verwendet. Nicht periodische Wechselströme wie in Abbildung 1.1 (c) sind in der Nachrichtentechnik für die Übertragung akustischer Signale von grosser Bedeutung, da diese (z.B. Sprache) ebenfalls nicht periodisch ist (siehe Versuch IZ1 Schallwellen).

1.3.2 Sinusförmige Wechselströme

Da sich alle veränderlichen Ströme mathematisch durch Fourier-Reihen bzw. Fourier-Integrale in sinusförmige Ströme zerlegen lassen, sind diese von übergeordneter Bedeutung und sollen im Folgenden näher betrachtet werden.

Legt man die zeitlich veränderliche Spannung $U(t)$ an einem elektrischen Verbrauchsgerät an, so wird dieses von einem ebenfalls zeitabhängigen Strom $I(t)$ durchflossen. Die Zeitverläufe von $U(t)$ und $I(t)$ sind dabei im Allgemeinen verschieden.

Von einem *linearen Element* spricht man, wenn eine angelegte sinus- oder kosinusförmige Spannung $U(t)$ einen wiederum sinus- oder kosinusförmigen Strom $I(t)$ im zeitlichen Verlauf mit gleicher Kreisfrequenz ω und zumeist unterschiedlicher Phase φ erzeugt.

In diesem Fall gilt für die Spannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

und für den Strom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ sind charakterisiert durch die Amplitude I_0 bzw. U_0 und die Kreisfrequenz ω .

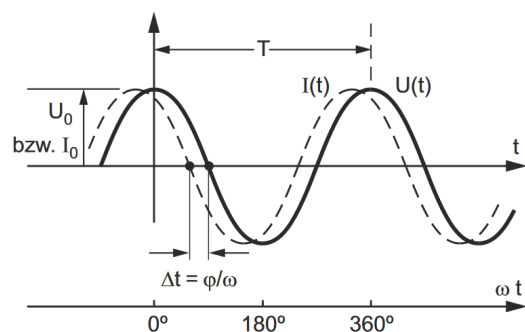


Abbildung 1.2: Dargestellt ist die Phasenverschiebung φ zwischen dem Strom $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ im zeitlichen Verlauf.

Ist die Phasenverschiebung φ positiv, dann läuft der Strom der Spannung zeitlich voraus. In Abbildung 1.2 erkennt man dies daran, dass der Strom $I(t)$ im Vergleich zur Spannung $U(t)$ zu kleineren Zeiten hin verschoben ist.

Der Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz ω , der Frequenz f und der Periodendauer T der Schwingung ist gegeben durch

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.3)$$

Ein lineares Element nimmt die *momentane Leistung* $N(t) = U(t) \cdot I(t)$ zur Zeit t auf. Setzt man die Gleichungen 1.1 und 1.2 ein erhält man für die momentane Leistung $N(t)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} N(t) &= I_0 U_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} I_0 U_0 [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Für diese Umformung nutzt man die Identität

$$\cos(a) \cos(a + b) = \frac{1}{2} [\cos(2a + b) + \cos(b)]$$

In Abbildung 1.3 wurde die Funktion $\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)$ für drei verschiedene Phasenverschiebungen φ geplottet. Dabei stehen die positiven Flächen unter der Kurve (weiss) für die vom Gerät aufgenommene Leistung und die negativen Flächen (schraffiert) für die zur Wechselstromquelle zurück fließende Leistung. Bei $\varphi = \pi/2$ fließt die Leistung vollständig zur Quelle zurück, bei $\varphi = 0$ bleibt sie vollständig im Gerät und bei $\varphi = \pi/3$ fließt sie teilweise zurück zur Quelle. Aus Gleichung 1.4 folgt unter Benutzung des Zusammenhangs 1.3 direkt, dass die Frequenz des Energieflusses doppelt so gross ist wie die Frequenz der Wechselspannung.

Der zeitliche Mittelwert der Leistung $\bar{N}$ ist gegeben durch den Ausdruck

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\varphi)$$

Die Gleichung 1.4 kann dann geschrieben werden als

$$N(t) = \bar{N} + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(2\omega t + \varphi)$$

Daraus lässt sich ablesen, dass die Leistung $N(t)$ mit der doppelten Kreisfrequenz von 2ω um den zeitlichen Mittelwert $\bar{N}$ oszilliert.

Ein *Effektivwert* ist so definiert, dass er einen direkten Vergleich zwischen Wechselstrom und Gleichstrom bzw. zwischen Wechselspannung und Gleichspannung erlaubt. Sind I_0 und U_0 Scheitelwerte, dann sind $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ und $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$ die dazugehörigen Effektivwerte. Die umgesetzte Leistung an einem ohm'schen Widerstand bei einem Wechselstrom (engl. *alternative current*) mit effektiver Spannung $U_{\text{eff}}^{\text{ac}}$ und effektive Stromstärke $I_{\text{eff}}^{\text{ac}}$ ist gleich gross

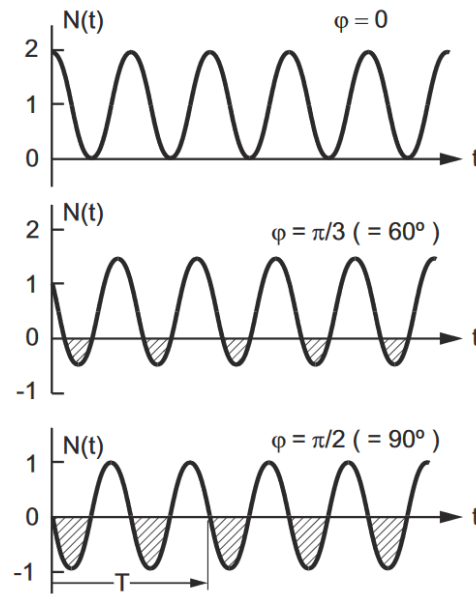


Abbildung 1.3: Die Leistung N ist zur Zeit t aufgetragen. Positive Flächen stehen für vom Gerät aufgenommene Leistung, negative (schraffierte) Flächen stellen zur Stromquelle zurück fließende Leistung dar, wobei der jeweilige Anteil von φ abhängt.

wie bei einem Gleichstrom (engl. *direct current*) mit

$$U_{\text{eff}}^{\text{ac}} = U^{\text{dc}} \quad \text{und} \quad I_{\text{eff}}^{\text{ac}} = I^{\text{dc}}$$

Die mittlere Leistung wird auch *Wirkleistung* genannt und berechnet sich wie folgt als

$$\bar{N}_{\text{eff}} = \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}}_{=N_S} \cos(\varphi)$$

Dabei wird das Produkt aus Effektivspannung und Effektivstrom als *Scheinleistung* N_S bezeichnet mit $\bar{N}_{\text{eff}} = N_S \cos(\varphi)$. Als *Scheinwiderstand* R_S bezeichnet man den Quotienten

$$R_S = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} \quad (1.5)$$

Daraus folgt direkt der Zusammenhang

$$N_S = I_{\text{eff}}^2 R_S = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R_S}$$

Man bemerke, dass U_0 und ω Eigenschaften der Wechselspannungsquelle, R_S und φ Eigenschaften des Verbrauchers sind.

Messgeräte zeigen üblicherweise keine Scheitelwerte, sondern direkt die Effektivwerte an. Die in Deutschland und der Schweiz übliche Netzspannung von 230 V ist ein Effektivwert, wobei der Scheitelwert $U_0^{\text{Netz}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}$ beträgt.

1.3.3 Bauelemente in der Elektrotechnik

Es gibt aktive und passive Bauelemente in der Elektrotechnik. Aktive Bauelemente haben eine Verstärkerwirkung oder eine Steuerfunktion wie z.B. eine Diode, mit deren Hilfe sich Signale steuern lassen, da Dioden diese nur in einer Richtung durchlassen. Weitere Beispiele für aktive Bauelemente wären Transistoren, Gleichrichter und LED. Für unsere Filter sind vorerst nur passive Bauelemente relevant, das heisst Elemente, welche keine Verstärkerwirkung und keine Steuerfunktion haben. Beispiele für solche wären Widerstände, Kondensatoren und Spulen. Diese passiven Bauelemente sollen im Folgenden detailliert betrachtet werden.

Ohm'scher Widerstand

Bei einem rein ohm'schen Widerstand R sind der Strom $I(t)$ und die Spannung $U(t)$ exakt proportional und es gilt

$$U(t) = RI(t)$$

Damit sind der Strom und die Spannung *in Phase* und es gilt $\varphi = 0$, wie in Abbildung 1.4 zu sehen ist.

Kondensator

Die Kapazität C eines Kondensators sei definiert als das Verhältnis der Ladung $Q(t)$ der Beläge zur Spannung $U(t)$ zwischen diesen. Es gilt $Q(t) = CU(t)$ und damit

$$U(t) = \frac{1}{C} Q(t) \quad (1.6)$$

Der Strom $I(t)$ ist nichts anderes als bewegte Ladung. Die in der Zeit dt dem Kondensator zufließende Ladung dQ ist definitionsgemäss $dQ = I(t) dt$. Durch Ableiten von $U(t)$ nach dt lässt sich $Q(t)$ in Gleichung 1.6 eliminieren und man findet

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d(I(t) dt)}{dt} = \frac{1}{C} I(t) \quad (1.7)$$

Das bedeutet, dass nur eine Spannungsänderung am Kondensator ebenfalls zu einem Strom führt. Setzt man in Gleichung 1.7 die Gleichungen 1.1 und 1.2 ein, so erhält man

$$-\omega U_0 \sin(\omega t) = \frac{1}{C} I_0 \cos(\omega t + \varphi_C)$$

Dieser Ausdruck lässt sich umschreiben zu

$$U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos(\omega t + \varphi_C) \quad (1.8)$$

Dabei ist φ_C die Phase zwischen der Spannung $U(t)$ und dem Strom $I(t)$ beim Kondensator (engl. capacitor). Da der Scheinwiderstand definiert ist als $R_S = U_0/I_0$ findet man für den Kondensator durch identifizieren

$$R_S = \frac{1}{\omega C}$$

und kann die Phasenverschiebung als $\varphi = +\pi/2$ ablesen. Das bedeutet, dass beim Kondensator der Strom der Spannung um 90° voraus eilt. Dies ist in Abbildung 1.4 zu sehen.

Spule

Man betrachte eine idealisierte Spule ohne Widerstand, d.h. zum Beispiel eine supraleitende Spule. Bei dieser wäre die Spannung zwischen den Drahtenden der Spule proportional zur zeitlichen Änderung des Stroms. Man schreibt

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (1.9)$$

Anders gesagt, eine Stromänderung durch die Spule führt zu einer Spannung. Der Proportionalitätsfaktor L heisst *Koeffizient der Selbstinduktion*. Setzt man die Gleichungen 1.1 und 1.2 in Gleichung 1.9 ein und leitet den Strom $I(t)$ nach der Zeit ab, so bekommt man

$$U_0 \cos(\omega t) = L(-\omega I_0) \sin(\omega t + \varphi_L) \quad (1.10)$$

Hierbei ist φ_L die Phasenverschiebung zwischen $U(t)$ und $I(t)$ der Spule. Die Gleichung 1.10 lässt sich unter Benutzung von

$$-\sin(a + b) = \sin(-a - b) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

umformen zu

$$U_0 \cos(\omega t) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \varphi_L + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.11)$$

Den Scheinwiderstand, gegeben durch $R_S = U_0/I_0$, findet man wiederum durch Identifikation und bestimmt ihn als

$$R_S = \omega L$$

Die Phasenverschiebung zwischen Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ ist $\varphi_L = -\pi/2$ für eine Spule, wie man aus Gleichung 1.11 ablesen kann. Das bedeutet, die Spannung eilt dem Strom unabhängig von der Frequenz um 90° voraus. Dies ist in Abbildung 1.4 dargestellt.

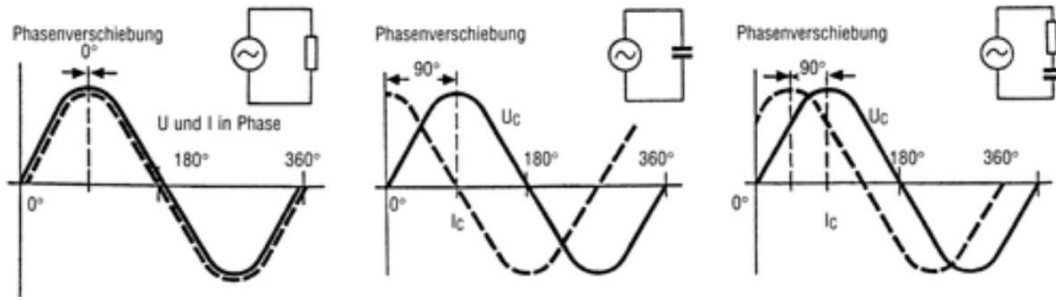


Abbildung 1.4: Die Phasenverschiebung für einen ohm'schen Widerstand ist $\varphi_R = 0^\circ$ (links), für einen Kondensator $\varphi_C = +\pi/2$ (mitte) und für eine Spule $\varphi_L = -\pi/2$ (rechts). Beim Widerstand sind Strom und Spannung in Phase (links), beim Kondensator eilt der Strom der Spannung um 90° voraus (mitte) und bei der Spule eilt die Spannung dem Strom um 90° voraus (rechts). Die passenden Schaltbilder sind jeweils oben rechts aufgezeichnet.

1.3.4 Die komplexe Darstellung des ohm'schen Gesetzes

Für ein System mit Gleichstrom I^{dc} und Gleichspannung U^{dc} gilt das ohm'sche Gesetz $U^{\text{dc}} = RI^{\text{dc}}$. Wechselströme und Wechselspannungen sind im Gegensatz dazu in der Regel Phasenverschoben, es gilt $\varphi \neq 0$. Um das ohm'sche Gesetz dennoch in seiner einfachen Form verwenden zu können, schreibt man

$$U(t) = ZI(t) \quad (1.12)$$

und muss für die Spannung $U(t)$, den Strom $I(t)$ und den Faktor Z komplexe Zahlenwerte zulassen. Mathematisch würde man schreiben:

$$U^{\text{dc}}(t) \in \mathbb{R} \quad I^{\text{dc}}(t) \in \mathbb{R} \quad R \in \mathbb{R} \quad U^{\text{ac}}(t) \in \mathbb{C} \quad I^{\text{ac}}(t) \in \mathbb{C} \quad Z \in \mathbb{C}$$

Dabei entspricht $\mathbb{R}$ der Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ der Menge der komplexen Zahlen. Da es fortan ausschliesslich um Wechselströme geht wird der Index weggelassen, beispielsweise ist mit $I(t)$ immer $I^{\text{ac}}(t)$ gemeint.

Komplexe Zahlen können in einer Gausebene dargestellt werden. Dabei gibt es verschiedene Notationen: Entweder schreibt man die Zahl als $a + ib$, wobei a der Realteil, b der Imaginärteil und i ist die imaginäre Einheit ist. Dies entspricht den Koordinaten auf den Achsen. Rechts im Beispiel ist $a = 3$ und $b = 2$, deshalb ist der Punkt bei 3 auf der Re-Achse und bei 2 auf der Im-Achse eingezeichnet. Alternativ kann eine komplexe Zahl in der Polarform aufgeschrieben werden als $re^{i\varphi}$. Dabei steht r für den Radius, also den Abstand zum Koordinatenursprung, und φ ist der Phasenwinkel, um den von der Re-Achse weggedreht wird.

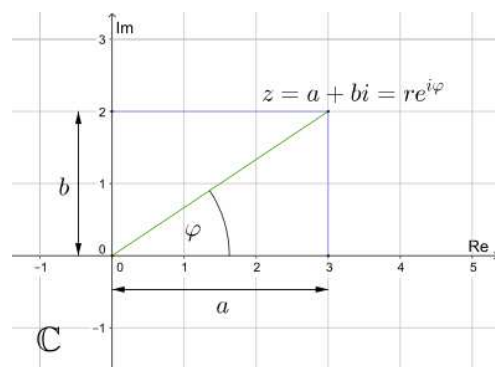


Abbildung 1.5: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ können in der Gausebene dargestellt werden als $a + ib$ oder $re^{i\varphi}$.

Die Wechselspannung $U(t)$ mit Scheitelspannung U_0 lässt sich in der Polarform schreiben als

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad U_0 \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

Den Wechselstrom $I(t)$ kann man analog notieren, wobei man berücksichtigen muss, dass es eine Phasenverschiebung zwischen $U(t)$ und $I(t)$ gibt. Wenn wir also zuvor $U_0 \in \mathbb{R}$ definiert

haben, so muss $I_0 \in \mathbb{C}$ (und höchstwahrscheinlich nicht in $\mathbb{R}$) sein. Das bedeutet, dass I_0 mit grosser Wahrscheinlichkeit nicht auf der Re-Achse liegt und wir $I_0 = |I_0|e^{i\varphi}$ schreiben können. Dabei ist $|I_0|$ der Absolutbetrag¹ von I_0 . Man erhält

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} = |I_0| e^{i\varphi} e^{i\omega t} = |I_0| e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1.14)$$

Die EULER'sche Formel gibt den folgenden Zusammenhang:

$$re^{i\alpha} = r \cos(\alpha) + ir \sin(\alpha) \quad (1.15)$$

Dabei ist $r \cos(\alpha)$ der Realteil und $r \sin(\alpha)$ der Imaginärteil. Damit identifiziert man den Realteil der Wechselspannung $U(t)$ und des Wechselstroms $I(t)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[U(t)] &= |U_0| \cos(\omega t) \\ \operatorname{Re}[I(t)] &= |I_0| \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Der Faktor Z ist in der Wechselstromtheorie die Analogie zu einem Widerstand in der Gleichstromlehre und wird als *Impedanz* bezeichnet. Setzt man Gleichung 1.13 und Gleichung 1.14 in Gleichung 1.12 ein, erhält man

$$U_0 e^{i\omega t} = Z I_0 e^{i\omega t} \quad (1.16)$$

Dies ist das *ohm'sche Gesetz für Wechselspannungen und Wechselströme*. Man schliesst daraus, dass $U_0 = Z I_0$, wenn in Gleichung 1.16 beidseitig durch $e^{i\omega t}$ dividiert wird. Es lässt sich folgern, dass

$$|Z| = \frac{|U_0|}{|I_0|} = R_S$$

Dieser Absolutbetrag der Impedanz Z entspricht gerade dem Scheinwiderstand R_S , wenn man mit Gleichung 1.5 vergleicht. Mit $U_0 \in \mathbb{R}$ und $I_0 = |I_0|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ können wir schreiben

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{|U_0|}{|I_0|e^{i\varphi}} = |Z|e^{-i\varphi} = R_S e^{-i\varphi} \quad (1.17)$$

Mit Hilfe von Gleichung 1.17 lassen sich die Impedanz einer Spule Z_L und die Impedanz eines Kondensators Z_C angeben, da der Scheinwiderstand R_S und die Phasenverschiebung φ aus dem Kapitel 1.3.3 bekannt sind:

$$\text{Spule} \quad R_S = \omega L \quad \varphi_L = -\frac{\pi}{2} \quad Z_L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega L \in \mathbb{C} \quad (1.18)$$

$$\text{Kondensator} \quad R_S = \frac{1}{\omega C} \quad \varphi_C = +\frac{\pi}{2} \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i\omega C} \in \mathbb{C} \quad (1.19)$$

$$\text{Ohm'scher Widerstand} \quad R_S = R \quad \varphi_R = 0 \quad Z_R = R \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

Dabei wurden die Identitäten $i = e^{i\pi/2}$ und $1/i = -i$ genutzt. Die hier hergeleiteten Scheinwiderstände, Phasenverschiebungen und Impedanzen für Spulen, Kondensatoren und Ohm'sche Widerstände finden sich in der Formelsammlung.

¹Der Absolutbetrag einer komplexen Zahl $k \in \mathbb{C}$ wird mit Betragsstrichen $|k|$ notiert und ist definiert als $|k| = \sqrt{\operatorname{Re}(k)^2 + \operatorname{Im}(k)^2}$. Sei zum Beispiel $k = 3 + 4i$, dann ist $|k| = \sqrt{\operatorname{Re}(k)^2 + \operatorname{Im}(k)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ eine reelle, nicht negative Zahl. Es gilt für alle $k \in \mathbb{C}$, dass $|k| \in \mathbb{R}^+$.

1.3.5 Die Kirchhoff'schen Gesetze

Wird eine beliebige Anzahl an passiven Bauelementen, wie sie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben wurden, zusammen geschaltet, dann erhält man sogenannte Netzwerke. Um diese zu untersuchen verwendet man die beiden Kirchhoff'schen Gesetze:

1. *Knotenregel:* In einem Verzweigungspunkt (engl. Junction) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der wegfließenden Ströme. Im Beispiel in Abbildung 1.6 ist $I_1 + I_2 = I_T$.
2. *Maschenregel:* Die Spannung zwischen zwei Punkten eines Netzwerks ist gleich der algebraischen Summe der Spannungen über den einzelnen, dazwischen liegenden Elementen. Die Gesamtspannung einer geschlossenen Masche ist null. In Abbildung 1.7 gilt beispielsweise $U_{\text{ges}} = 12\text{ V} - 2\text{ V} - 4\text{ V} - 6\text{ V} = 0$.

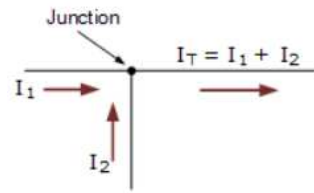


Abbildung 1.6: Knotenregel

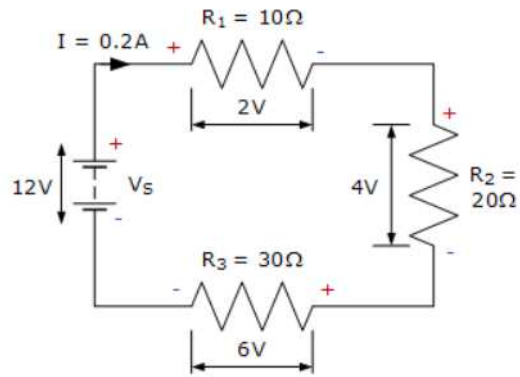


Abbildung 1.7: Maschenregel

Die Kirchhoff'schen Gesetze gelten sowohl in der Gleichstromlehre als auch in der oben eingeführten Wechselstromtheorie mit $U(t) = ZI(t)$. Stellt man die Kirchhoff'schen Gesetze auf, dann erhält jedes Element einen willkürlichen Richtungspfeil, der die positive Richtung der Ströme und Spannungen darstellt.

Mit Hilfe von beispielsweise einem Generator oder einem Transformator lässt sich eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ erzeugen. In komplexer Polarform entspricht dies $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ mit $U_0 \in \mathbb{R}$ der Spannungsamplitude. Für jedes Element n sollen Strom $I_k(t)$ und Spannung $U_k(t)$ gemäss dem ohm'schen Gesetz $U_k(t) = Z_k(t)I_k(t)$ formuliert werden.

Serienschaltung

Es seien n passive Elemente in Serie hintereinander geschaltet. Ein Beispiel dafür wäre das in Abbildung 1.7 dargestellte Netzwerk, hier sind drei Widerstände in Serie geschaltet und es gibt keine Verzweigungen.

Der Strom $I(t)$ ist bei einer Serienschaltung in jedem dieser n Elemente gleich, die Gesamtspannung $U(t)$ addiert sich nach der Maschenregel, das heisst $U(t) = U_1(t) + \dots + U_n(t)$. Nach dem ohm'schen Gesetz gilt

$$U(t) = U_1(t) + \dots + U_n(t) = (Z_1 + \dots + Z_n)I(t) = ZI(t)$$

Bei der Serienschaltung ist die Gesamtimpedanz von n hintereinander geschalteten Elementen gleich der Summe der einzelnen Impedanzen, also $Z = Z_1 + \dots + Z_n$.

Da die Gesamtspannung $U(t)$ durch die Spannungsquelle vorgegeben ist, lässt sich der Strom $I(t)$ berechnen als

$$I(t) = \frac{U(t)}{Z}$$

Der Absolutbetrag der Stromamplitude ist dann

$$|I_0| = \frac{|U_0|}{|Z|}$$

Aus Gleichung 1.17 folgt zusammen mit der EURLER'schen Formel 1.15 und der Symmetrie des Cosinus, also $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, schliesslich

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} \quad (1.21)$$

Mit Gleichung 1.17 sowie $\tan(\alpha) = \sin(\alpha) / \cos(\alpha)$ und $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ folgt unter erneuter Benutzung der EURLER'schen Formel der Ausdruck

$$\tan(\varphi) = -\frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} \quad (1.22)$$

Parallelschaltung

Bei einer Parallelschaltung mit n passiven Elementen fällt über jedem dieser Elemente die gleiche Spannung $U(t)$ ab. Die Ströme addieren sich zu einem Gesamtstrom, das heisst $I_1(t) + \dots + I_n(t) = I(t)$. Weiter gilt

$$I_k(t) = \frac{U(t)}{Z_k}$$

Dabei ist $I_k(t)$ der Strom im k -ten Element und Z_k die Impedanz des k -ten Elements.

Durch einsetzen erhält man schliesslich

$$I(t) = I_1(t) + \dots + I_n(t) = U(t) \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) = \frac{U(t)}{Z}$$

Bei einer Parallelschaltung ist der Kehrwert der Impedanz $1/Z$ von n Elementen gleich der Summe der Kehrwerte der einzelnen Impedanzen:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Die Spannungsquelle gibt die Spannung $U(t)$ vor. Man erhält

$$U(t) = ZI(t)$$

Die Spannungsamplitude ist dann

$$|U_0| = |Z||I_0|$$

Durch einsetzen in Gleichung 1.17 findet man mit der EURLER'schen Gleichung 1.15 die Formel

$$\cos(\varphi) = -\frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} \quad (1.23)$$

Für die Stromphase findet man analog zu Gleichung 1.22 schliesslich

$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)} \quad (1.24)$$

Man beachte das unterschiedliche Vorzeichen für Serien- und Parallelschaltung. Dies kommt daher, da in Gleichung 1.17 das Vorzeichen so definiert wurde, dass φ die Phasenverschiebung des Stroms gegen die Spannung ist. Es folgt ein positives Vorzeichen für die Parallelschaltung.

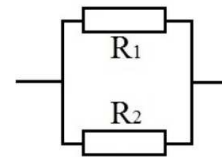


Abbildung 1.8: Parallelschaltung am Beispiel zweier Widerstände R_1 und R_2 . Das Netzwerk ist verzweigt.

1.3.6 Spannungsteiler und Filter

Ein *Spannungsteiler* besteht in der Wechselstromtheorie aus zwei in Serie geschalteten Impedanzen. Mit Hilfe des Spannungsteilers lassen sich Spannungen erzeugen, die kleiner sind als die Gesamtspannung.

Als einfachstes Beispiel könnte man sich zwei Widerstände R_1 und R_2 in Serie vorstellen. Wird eine Gesamtspannung U angelegt, so wird diese über die zwei Widerstände R_1 und R_2 in Teilspannungen U_1 und U_2 zerlegt. Diese Teilspannungen können direkt über den jeweiligen Widerständen abgegriffen werden. Dies ist in Abbildung 1.9 dargestellt - hier wird die Spannung U_2 abgegriffen, wobei $U_2 < U$. Durch geschickte Wahl der Widerstände R_1 und R_2 kann jede beliebige Spannung kleiner der Gesamtspannung über den Widerständen abgegriffen werden.

Ein *Potentiometer* ist ein Bauteil, dessen Widerstand kontinuierlich verstellt werden kann. Üblicherweise hat ein Potentiometer drei Anschlüsse, wie man in den Abbildungen 1.10 und 1.11 erkennt. Potentiometer sind in vielen elektrischen Geräten verbaut.

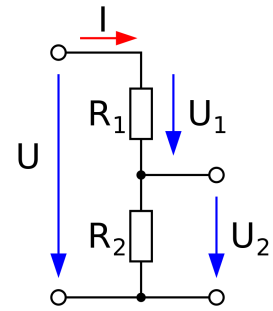


Abbildung 1.9: Die Spannung U wird über zwei Widerstände R_1 und R_2 in die Teilspannungen U_1 und U_2 zerlegt, welche einzeln über den jeweiligen Widerstand abgegriffen werden kann.



Abbildung 1.10: Drehpotentiometer mit drei Anschlüssen: Mit dem Drehknopf kann der Widerstand reguliert werden.

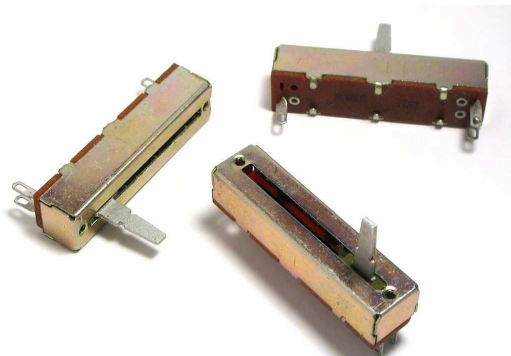


Abbildung 1.11: Schiebepotentiometer regulieren den Widerstand über einen Schieberegler.

Ein realer Widerstand R ist nicht von der Frequenz abhängig. Spulen und Kondensatoren sind frequenzabhängige Widerstände:

- Ein *Kondensator* hat die Impedanz $Z_C = 1/(i\omega C)$. Bei grossen Kreisfrequenzen ω ist die Impedanz klein und Strom fliesst durch den Kondensator. Bei kleinen Kreisfrequenzen wirkt der Kondensator im Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ nach Gleichung 1.6 wie ein Unterbruch, das heisst er entspricht einem grossen Widerstand.
- Eine *Spule* hat die Impedanz $Z_L = i\omega L$. Bei grosser Kreisfrequenz ω wird die Impedanz gross und entspricht einem grossen Widerstand.

Auf diese Weise können frequenzabhängige Spannungsteiler gebaut werden. Aus den passiven Elementen Widerstand R , Kondensator C und Spule L können beispielsweise die nachfolgenden sechs frequenzabhängigen Spannungsteiler gebaut werden. Auf der linken Seite wird jeweils eine Wechselspannung U_{in} angelegt und rechts wird die Ausgangsspannung U_{out} abgenommen.

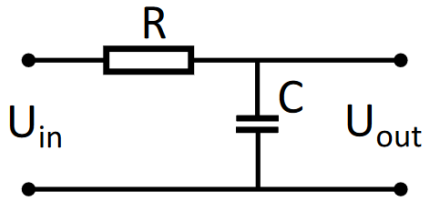


Abbildung 1.12: Ein Widerstand R und ein Kondensator C sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über den Kondensator gemessen.

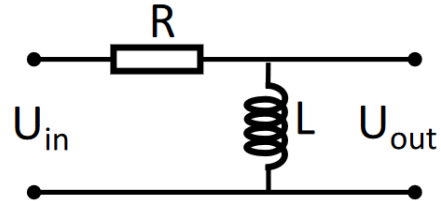


Abbildung 1.13: Ein Widerstand R und eine Spule L sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über die Spule gemessen.

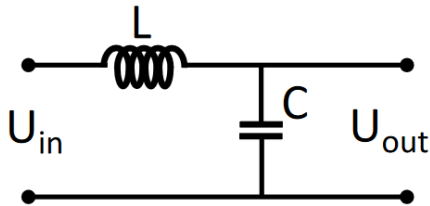


Abbildung 1.14: Eine Spule L und ein Kondensator C sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über den Kondensator gemessen.

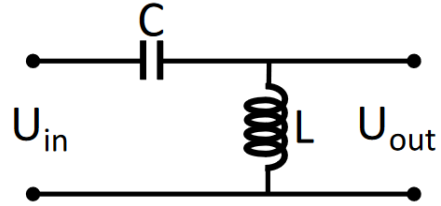


Abbildung 1.15: Ein Kondensator C und eine Spule L sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über die Spule gemessen.

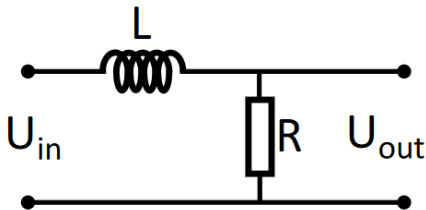


Abbildung 1.16: Eine Spule L und ein Widerstand R sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über den Widerstand gemessen.

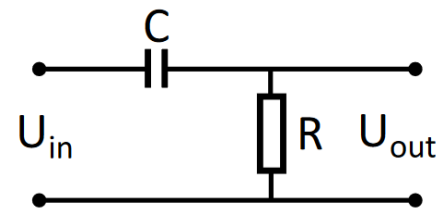


Abbildung 1.17: Ein Kondensator C und ein Widerstand R sind in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über den Widerstand gemessen.

Wichtige Einheiten

Ein *Dezibel* entspricht einem Zehntel von einem Bel. Man schreibt [dB] bzw. [B]. Damit gibt man das Verhältnis Q_P zweier Leistungsgrößen P_1 und P_2 wie folgt an:

$$Q_P = \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) [\text{B}] = 10 \log \left(\frac{P_1}{P_2} \right) [\text{dB}]$$

In linearen Systemen sind die Leistungsgrößen P_k proportional zu den Quadraten der einwirkenden Feldgrößen F_k^2

$$Q_F = 10 \log \left(\frac{F_1^2}{F_2^2} \right) [\text{B}] = 20 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right) [\text{dB}] \quad (1.25)$$

Eine solche Feldgröße ist beispielsweise die elektrische Spannung. Eine *Dekade* entspricht einer Verzehnfachung der Frequenz, während eine *Oktave* einer Verdopplung der Frequenz entspricht.

Beispiel für einen Filter

Als Beispiel dazu betrachte man Abbildung 1.12 oben. Die Ausgangsspannung U_{out} kann berechnet werden. Die Eingangsspannung U_{in} fällt hier über einen Widerstand R und einen Kondensator C ab. Die Gesamtimpedanz dieser beiden Elemente Z entspricht der Summe der Impedanzen der beiden Elemente, da diese in Serie geschaltet sind. Es ergibt sich

$$Z = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C}$$

Für die Ausgangsspannung U_{out} findet man bei Abbildung 1.18 unter Vernachlässigung der Phase φ schliesslich

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}} \cdot \frac{|Z_C|}{|Z|} = U_{\text{in}} \cdot \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = U_{\text{in}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

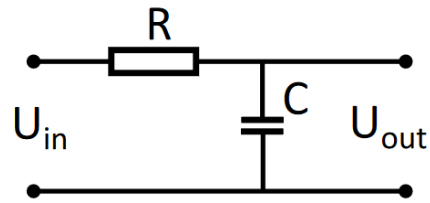


Abbildung 1.18: Es sei ein Widerstand und eine Kondensator in Serie geschaltet. Die Ausgangsspannung U_{out} wird über den Kondensator abgegriffen.

Wenn man das Verhältnis $|U_{\text{out}}|/|U_{\text{in}}|$ der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung aufzeichnet, dann erhält man die in Abbildung 1.19 dargestellte *Übertragungsfunktion* (engl. transmission function). Für tiefe Frequenzen ist hier $|U_{\text{out}}|/|U_{\text{in}}| \approx 1$, die Transmission ist gross. Grosse Frequenzen werden indes herausgefiltert. Deshalb spricht man hier von einem sogenannten *Tiefpassfilter* - die tiefen Frequenzen können diesen Filter passieren. Dies liegt daran, dass der Kondensator bei tiefen Frequenzen wie ein Unterbruch wirkt. Im Grenzwert $\omega \rightarrow 0$ ist der Strom $I = 0$. Daher misst man für tiefe Frequenzen bei U_{out} die Eingangsspannung U_{in} . Für grosse Frequenzen wird der Kondensator leitend, im Grenzfalle $\omega \rightarrow \infty$ liegt ein Kurzschluss vor. In diesem Fall geht die Ausgangsspannung U_{out} gegen null.

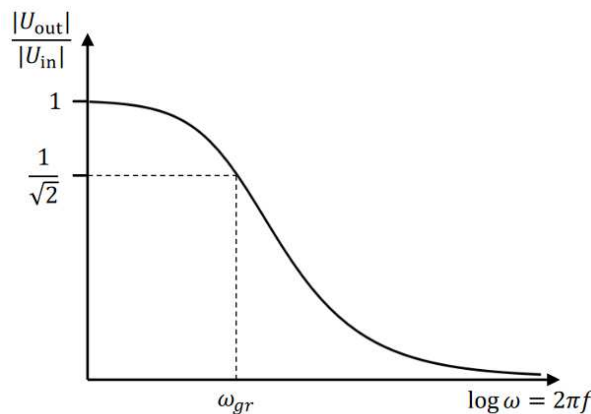


Abbildung 1.19: Das Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsspannung ist als Funktion von $\log(\omega)$ aufgetragen. Nur die tiefen Frequenzen können diesen Filter passieren.

Roll-Off und Grenzfrequenz

Je steiler die Übertragungsfunktion in Abbildung 1.19, desto «schärfer» ist der Filter. Man bezeichnet diese Steilheit als den *Roll-Off* eines Filters, wobei für die meisten Anwendungen ein grosser Roll-Off gewünscht ist. Ein typischer Wert für den Roll-Off bei einem Filter erster Ordnung, d.h. einem Filter bestehend aus zwei Elementen, ist 6 dB/Oktave oder 20 dB/Dekade.

Der in Abbildung 1.18 gezeigte Tiefpassfilter hat entsprechend der Gleichung 1.25 ein Verhältnis $Q_F = U_{\text{out}}/U_{\text{in}}$. Für $\omega = 1/RC$ findet man

$$Q_F = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ dB} = -3 \text{ dB}$$

Das bedeutet, dass bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 1/RC$ die Ausgangsspannung U_{out} im Vergleich zur Eingangsspannung U_{in} um 3 dB reduziert wird, was einer Abnahme auf $1/\sqrt{2} \cdot U_{\text{in}}$ entspricht (siehe Abbildung 1.19). Die Kreisfrequenz, bei der $U_{\text{out}}/U_{\text{in}} = -3 \text{ dB}$ bezeichnet man als *Grenzkreisfrequenz* ω_{gr} . Für den hier diskutierten Tiefpassfilter ist $\omega_{gr} = 1/RC$ (für Hochpassfilter gilt ebenso $\omega_{gr} = 1/RC$). Es gilt nach Gleichung 1.22 mit $\omega = 1/RC$, dass bei der Grenzkreisfrequenz ω_{gr} die Phasenverschiebung zwischen der Eingangs- und der Ausgangsspannung genau 45° ist. Frequenzabhängige Spannungsteiler kann man als Phasenschieber benutzen, da eine frequenzabhängige Phasenverschiebung zwischen U_{in} und U_{out} auftritt. Die sechs möglichen Filter erster Ordnung sind in den Abbildungen 1.12 bis 1.17 gezeigt.

Kombiniert man n Filter erster Ordnung, so erhält man einen Filter n -ter Ordnung. Diese haben einen schärferen Roll-Off - als grobe Abschätzung gilt 6 dB/Oktave und Ordnung. Es hängt von der Problemstellung ab, welche Ordnung benutzt werden sollte: Um 50 Hz Netzrauschen von einem sehr hochfrequenten Signal zu trennen reicht ein Filter erster Ordnung. Möchte man aber beispielsweise 10 Hz von einem 100 Hz Signal filtern, braucht es bessere Filter höherer Ordnung.

1.3.7 Serieschwingkreis

Der Hauptunterschied zwischen einem Serienschwingkreis und einem Parallelschwingkreis liegt in der gleichbleibenden Grösse. Nach den Kirchhoff'schen Gesetzen ist der Strom I im Serienschwingkreis überall gleich gross, während im Parallelschwingkreis die Spannung U über den Elementen gleich gross ist.

Impedanz, Phase und Resonanzbedingung

Bei einem RLC -Serienschwingkreis ist ein Widerstand R , eine Spule L und ein Kondensator C in Serie geschaltet. Die Impedanz dieses Schwingkreises entspricht der Summe der einzelnen Impedanzen:

$$\begin{aligned} Z &= R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \\ &= R + i \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{\text{Blindwiderstand } X} \end{aligned}$$

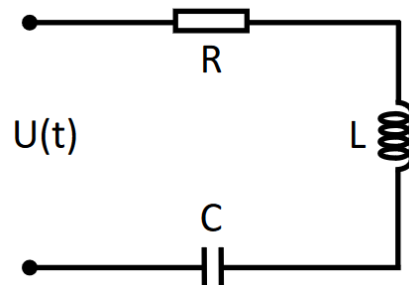


Abbildung 1.20: Ein Widerstand R , eine Spule L und ein Kondensator C sind in Serie geschaltet und eine Spannung $U(t)$ wird angelegt.

Daraus folgt direkt, dass

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = R_S \quad (1.26)$$

Den mit X benannten Term nennt man auch den Blindwiderstand. In Gleichung 1.26 sieht man, dass sich der RLC -Serienschwingkreis bei tiefen Frequenzen wie ein Kondensator und

bei hohen Frequenzen wie eine Spule verhält. Für die Phasenverschiebung φ des Stroms gilt nach Gleichung 1.22 hier

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

und weiter

$$\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{|Z|} = \frac{R}{R_S}$$

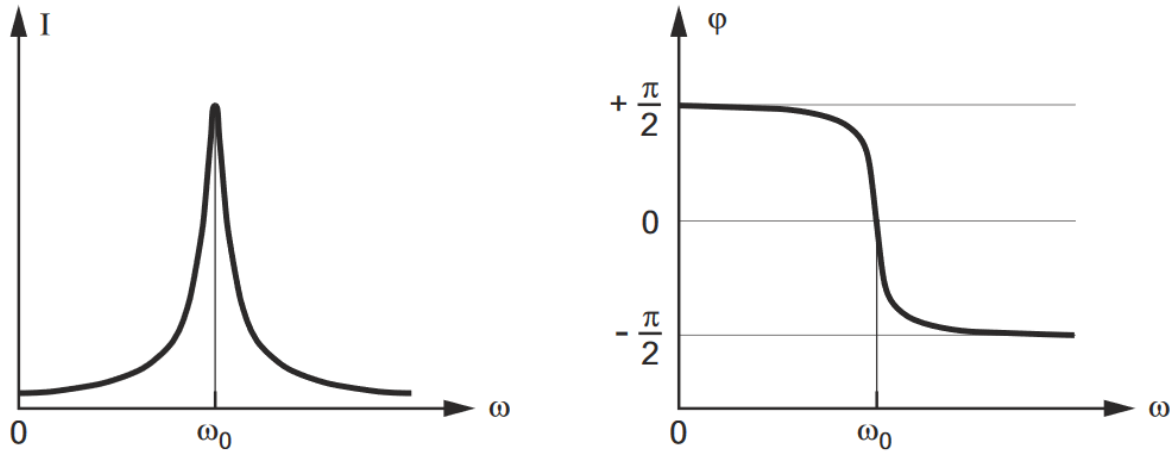


Abbildung 1.21: Bei der Resonanzfrequenz ω_0 ist der Strom $I(\omega)$ maximal. Die Phasenverschiebung φ ist bei der Resonanzfrequenz null.

Der Strom I und die Phase φ sind von der Kreisfrequenz ω abhängig, wie in Abbildung 1.21 zu sehen ist. Der Strom erreicht ein Maximum von $I(t) = U(t)/R$ bei der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.27)$$

Dies nennt man die *Resonanzfrequenz* des Systems, die Formel 1.27 heisst THOMSON'sche Resonanzformel. In diesem Fall ist die Phase $\varphi = 0$, der Stromkreis verhält sich wie ein rein ohm'scher Widerstand und der Blindwiderstand X verschwindet, was man als Resonanz bezeichnet.

Spannungsüberhöhung

Die an den Stromkreis gelieferte mittlere Leistung $\bar{N}$ beträgt

$$\bar{N} = N_S \cos(\varphi) = I_{\text{eff}}^2 R_S \cos(\varphi) = I_{\text{eff}}^2 R$$

Im Resonanzfall wird die gesamte Energie dem ohm'schen Widerstand geliefert, welcher *dissipativ* ist und die elektrische Energie in Wärme umwandelt. Die Spule und der Kondensator werden wegen der Phasenverschiebung von jeweils $\pm 90^\circ$ im zeitlichen Mittel keine Energie aufnehmen, d.h. die Spule und der Kondensator sind elastisch und speichern Energie nur für kurze Zeit.

Über der Spule greift man die folgende Spannung ab:

$$U_L = \frac{|Z_L|}{|Z|} U = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} U$$

Die Spannungen U_L und U sind entweder beides Amplituden oder beides Effektivwerte. Im Resonanzfall bei $\omega = \omega_0$ ist U_L maximal.

Ändert man die Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ durch Variation der Kapazität des Kondensators bei konstanter Spannung U und konstanter Frequenz ω , so erhält man

$$U_L(\omega_0) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2}} U$$

Ist der Widerstand $R \rightarrow 0$, dann fehlt eine Dämpfung für das System und die Spannungsamplitude kann sich zu beliebig grossen Werten aufschaukeln. In der Realität ist die Spannungsamplitude durch den dissipativen Energieverlust im Widerstand beschränkt und erreicht höchstens

$$U_L^{\max} = U_L(\omega = \omega_0) = \frac{\omega L}{R} U$$

Wenn $R < \omega L$, dann ist $U_L^{\max}$ grösser als die am Schwingkreis angelegte Spannung U - man spricht von einer *Spannungsüberhöhung*. Diese kann einzelne Bauteile in der Schaltung zerstören und ist daher zu vermeiden.

1.3.8 Parallelschwingkreis

Impedanz, Phase und Resonanzbedingung

In der nebenstehenden Abbildung ist ein RCL -Parallelschwingkreis dargestellt. Die Impedanz entspricht der Summe der Kehrwerte der Impedanzen der einzelnen Elemente:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

Daraus lässt sich der Betrag der Gesamtimpedanz $|Z|$ bestimmen als

$$|Z| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}$$

Die Phase φ ist gegeben durch den Ausdruck

$$\tan(\varphi) = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

Analog zum RLC -Serienschwingkreis gibt es einen Blindwiderstand

$$X = \frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}$$

Um die Resonanzbedingung zu erfüllen, muss beim Parallelschwingkreis die Impedanz maximal sein. Dies ist dann der Fall, wenn der Blindwiderstand $X = 0$ ist und geschieht bei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.28)$$

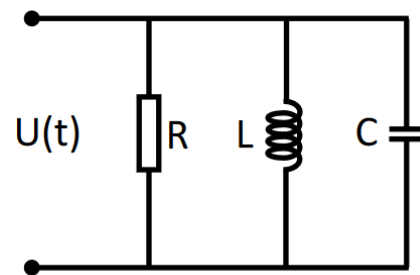


Abbildung 1.22: Ein Widerstand R , eine Spule L und ein Kondensator C sind parallel geschaltet, eine Spannung $U(t)$ ist angelegt.

Stromüberhöhung

Bei Resonanz fließen sogenannte *Resonanzströme* zwischen der Spule L und dem Kondensator C hin und her. Dabei ist $I_C(\omega_0)$ der Strom im Kondensator gleich $I_L(\omega_0)$ dem Spulenstrom bei Resonanz. Aus dem ohm'schen Gesetz für Wechselströme $U(t) = ZI(t)$ folgt bei beliebiger Spannung $\tilde{U}$

$$\omega_0 C \tilde{U} = \frac{\tilde{U}}{\omega_0 L}$$

Die Energie pendelt zwischen dem elektrischen Feld im Kondensator und dem magnetischen Feld der Spule. Sollte bei Resonanz gelten, dass

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} < R$$

dann sind die Resonanzströme stärker als das, was die angehängte Stromquelle liefert und es entsteht eine *Stromüberhöhung*.

1.3.9 Bandbreite und Güte

Die *Bandbreite* $\Delta\omega$ ist wie folgt definiert:

- Serienschwingkreis: Die Bandbreite definiert den Durchlass für den Strom und den Sperrbereich für die Spannung.
- Parallelschwingkreis: Die Bandbreite definiert den Durchlass für die Spannung und den Sperrbereich für den Strom

Die Impedanz ist bei einem Serienschwingkreis im Resonanzfall $Z = R$. Mit $I(\omega_0) = U_0/R$ folgt nach Definition

$$\frac{I(\omega_{u/o})}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.29)$$

Dabei ist $\omega_{u/o}$ die obere bzw. die untere Grenzkreisfrequenz. Diese kann durch Umformung gefunden werden als

$$\omega_{u/o} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \pm \frac{R}{2L}$$

Die absolute Bandbreite $\Delta\omega$ ist damit

$$\Delta\omega = \omega_o - \omega_u = \frac{R}{L} \quad (1.30)$$

Bei einem Parallelschwingkreis gilt gemäss Definition

$$\frac{\tilde{U}(\omega_{u/o})}{\tilde{U}(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1.31)$$

Für die Grenzfrequenzen gilt dann

$$\omega_{u/o} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \pm \frac{1}{2RC}$$

Man findet analog zum Serienschwingkreis die absolute Bandbreite

$$\Delta\omega = \omega_o - \omega_u = \frac{1}{RC} \quad (1.32)$$

Ist die Bandbreite klein, so ist die Resonanz scharf definiert. Je nach Anwendung ist eine scharf definierte Resonanz wünschenswert oder problematisch. Ein Mass für die Bandbreite ist die *Güte* Q , die definiert ist als das Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Bandbreite

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad (1.33)$$

Mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und $\Delta\omega$ aus Gleichung 1.30 findet man die Güte eines RLC -Serien-schwingkreises

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Die Güte eines RLC -Parallelschwingkreises ist gegeben durch

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Die Güte ist eine einheitenlose physikalische Grösse und beträgt für einen elektrischen Schwingkreis rund $Q = 100$, während ein mechanischer Schwingquarz etwa $Q = 10^5$ erreicht und eine Atomuhr auf eine Güte von $Q = 10^{13}$ kommt.

1.3.10 Bandpassfilter und Bandsperrefilter

Sogenannte Bandpass- und Bandsperrefilter sind Anwendungen von RLC -Schwingkreisen. Die Funktionsweise ist wie folgt:

- Ein *Bandpassfilter* lässt nur ein bestimmtes Frequenzband durch und filtert alle anderen Frequenzen, die höher oder tiefer als das erlaubte Frequenzband sind, raus.
- Ein *Bandsperrefilter* lässt alle Frequenzen ausser diejenigen eines bestimmten Bandes durch - er sperrt also die Frequenzen des Bandes.

Bandpass- und Bandsperrefilter erhält man, wenn man einen Tiefpassfilter und einen Hochpassfilter kombiniert, denn dadurch werden auch deren Übertragungsfunktionen kombiniert.

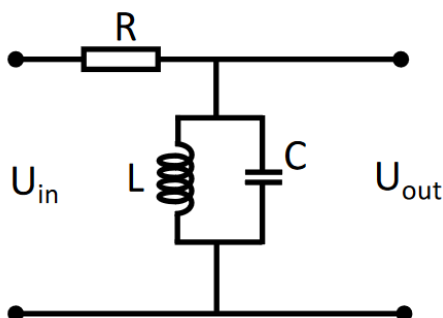


Abbildung 1.23: Dargestellt ist ein RLC -Parallelschwingkreis bestehend aus einem Widerstand R , einer Spule L sowie einem Kondensator C . Die Ausgangsspannung U_{out} wird über die Spule und den Kondensator abgegriffen.

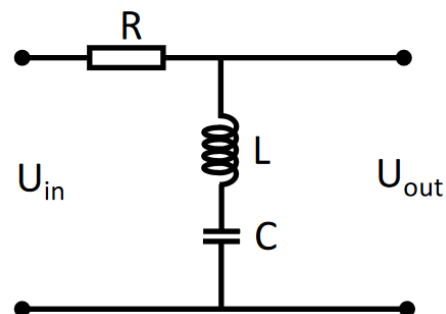


Abbildung 1.24: Dargestellt ist ein RLC -Serieschwingkreis bestehend aus einem Widerstand R , einer Spule L sowie einem Kondensator C . Die Ausgangsspannung U_{out} wird über die Spule und den Kondensator abgegriffen.

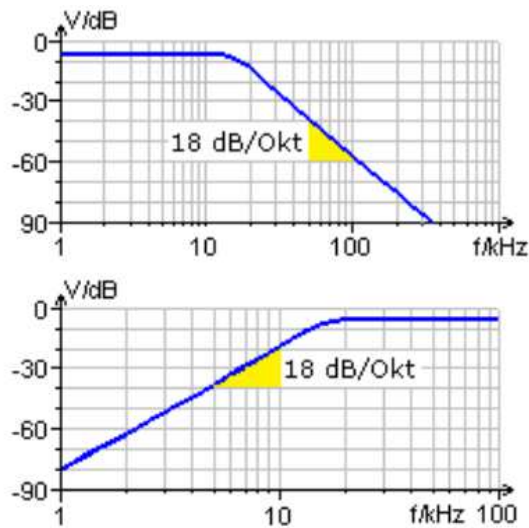


Abbildung 1.25: In der oberen Graphik ist die Übertragungsfunktion eines Tiefpassfilters eingezeichnet, während in der unteren die Übertragungsfunktion eines Hochpassfilters dargestellt ist. Der Roll-Off beider Filter beträgt in diesem Beispiel 18 dB/Oktave.

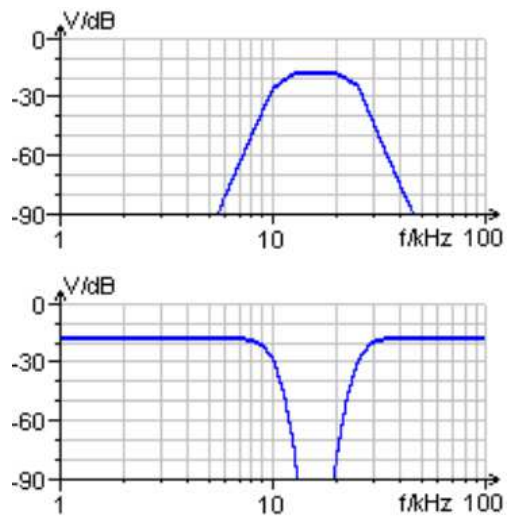


Abbildung 1.26: Oben ist die Übertragungsfunktion eines Bandpassfilter dargestellt - ein ganz bestimmtes Frequenzband kann passieren, während die tieferen und höheren Frequenzen herausgefiltert werden. Unten ist ein die Übertragungsfunktion eines Bandsperrefilters gezeigt.

1.4 Software

Für diesen Versuch wird die Simulationssoftware *LTspice* verwendet. Diese wurde von der Firma *Linear Technology* entwickelt und später an *Analog Devices* verkauft. *LTspice* ist mitunter die am häufigsten verwendete Software zur Simulation von Schaltkreisen, was dazu führt, dass die Software bestens dokumentiert ist und man auch via www.google.com bei Problemen schnell zu Lösungen kommt.



Diese Software ist Industriestandard für Simulationen von Schaltkreisen. Das Einarbeiten in dieses Programm ist Teil des Versuchs. Im folgenden wird die Installation von *LTspice* beschrieben, es wird erklärt, wie man einen Schaltkreis virtuell baut und anschliessend simuliert. Dabei wird erläutert, wie beispielsweise die Grenzkreisfrequenz oder der Roll-Off eines Schaltkreises gemessen werden kann.

1.4.1 Installation

Das Programm *LTspice* ist kostenlos für Windows 7, Windows 8 und Windows 10 sowie Mac 10.9+ erhältlich und kann heruntergeladen werden unter dem Link

<https://www.analog.com/en/design-center/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>

Dazu auf der genannten Seite auf den orangenen Download-Button klicken und dem Menü folgen. Die folgende Anleitung bezieht sich auf die Version für Windows 10. *Tipp*: Die Version für Windows ist etwas intuitiver als diejenige für Mac, es funktionieren aber beide gut.

1.4.2 Einen Schaltkreis bauen

Bevor mit der eigentlichen Simulation gestartet werden kann, muss der gewünschte Schaltkreis aufgebaut werden. Die dazu benötigten Buttons findet man in der Menüleiste oben im Fenster des Programms (siehe nachfolgende Abbildung). Darüber hinaus gibt es zahlreiche Shortcuts, welche im Anhang dieser Versuchsanleitung zusammen getragen sind.

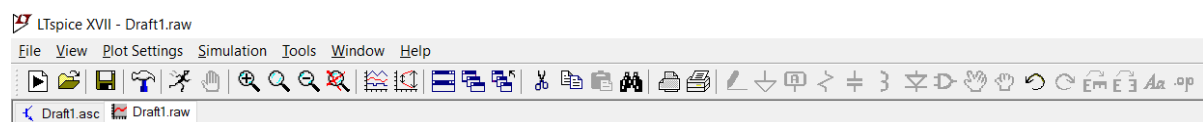
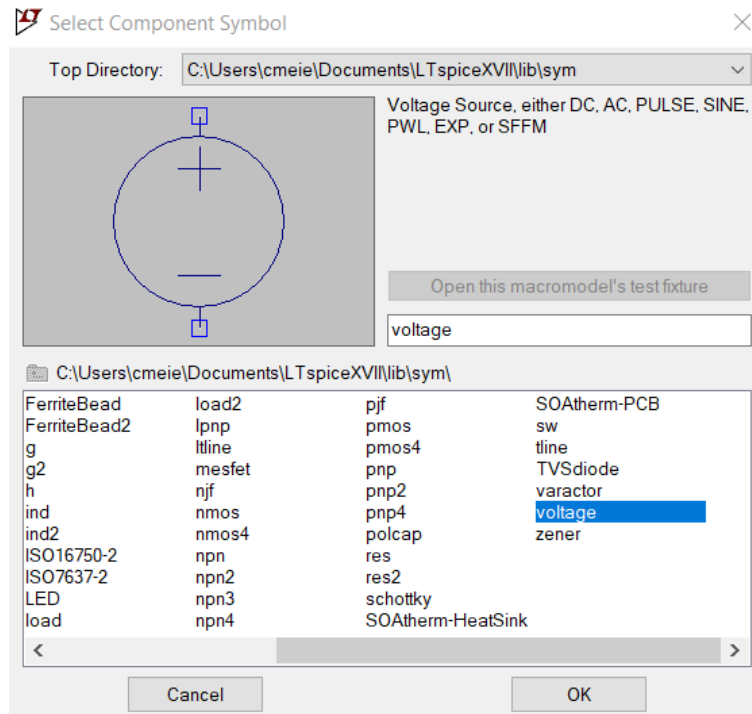


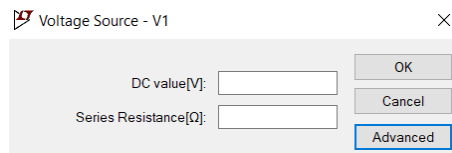
Abbildung 1.27: Die Funktionen sind in der Menüleiste zusammengefasst. Diese befindet sich am oberen Bildrand.

Die folgende Anleitung führt Schritt für Schritt zu einem funktionierenden Schaltkreis:

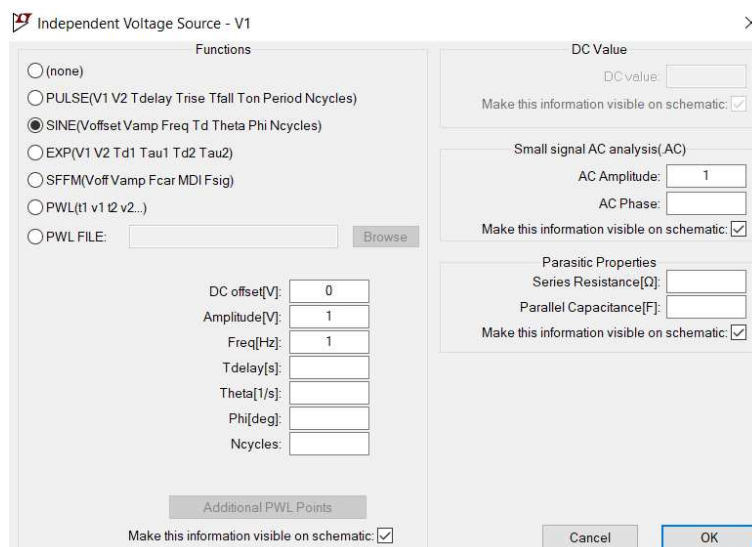
1. Mit dem Symbol kann ein neues Schema geöffnet werden.
2. Dieses kann unter *File, Save as* und später mit dem Symbol gespeichert werden.
3. Um eine Spannungsquelle zu zeichnen, klickt man auf das Symbol, wodurch sich das folgende Menü öffnet:



4. Man wählt in diesem Menü *voltage* für eine Spannungsquelle aus und platziert diese mit einem Linksklick auf dem Schema. Mit einem Rechtsklick verlässt man den Modus anschliessend.
5. Um die Spannungsquelle zu spezifizieren macht man einen erneuten Rechtsklick auf die Spannungsquelle. Es öffnet sich das folgende Fenster:

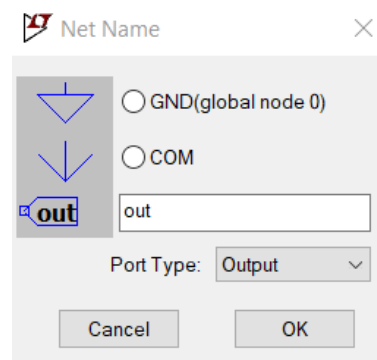


Hier klickt man auf *Advanced* und gelangt zu folgender Ansicht:



In diesem Fenster kann man einerseits die Form des Stroms bzw. der Spannung (z.B. Sinus) auswählen. Als DC offset ist in der Regel 0 einzutragen. Die Amplitude [V] und die Frequenz [Hz] sowie die AC Amplitude ist zu wählen und im jeweiligen Feld einzutragen. Trägt man keine AC Amplitude ein handelt es sich um eine Gleichstrom-Spannungsquelle. Schliesslich ist mit OK zu bestätigen.

6. Einen Widerstand zeichnet man mit dem  Symbol an der passenden Stelle durch einen Linksklick ein und verlässt den Widerstand-Modus mit einem Rechtsklick. Möchte man den Widerstand zuvor drehen, dann klickt man auf das  Symbol. Mit einem weiteren Rechtsklick auf den Widerstand können nach der Platzierung im Schema die Eigenschaften des Widerstands eingetragen werden (z.B. Resistance [Ω] der Widerstand usw.). *Tipp:* Für einen Widerstand von 1000Ω schreibt man 1k, was für kilo steht.
7. Mit dem Symbol  kann ein Kondensator eingefügt werden. Möchte man diesen drehen, so klickt man im Kondensatormodus auf das  Symbol. Mit der linken Maustaste kann man den Kondensator platzieren, mit der rechten Maustaste verlässt man den Kondensator-Modus. Mit einem erneuten Rechtsklick auf den Kondensator öffnet sich ein Menü, in welchem die Kapazität [F] eingetragen werden kann, danach mit OK bestätigen. *Tipp:* Für eine Kapazität von 10^{-8} F schreibt man 10n (nano).
8. Um eine Spule zu platzieren, wählt man in der Menüleiste das  Symbol aus und geht analog zum Kondensator vor.
9. Jeder Schaltkreis muss geerdet sein. Dazu platziert man das  Symbol an der gewünschten Stelle.
10. Einen Output fügt man ein, indem man auf das  Symbol klickt. Es öffnet sich das folgende Menü:

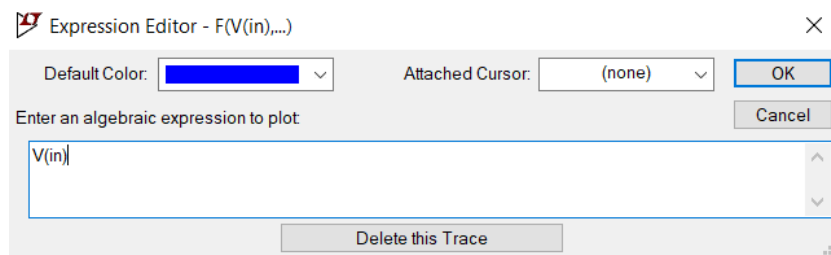


Man benennt den Output (z.B. out) und wählt den Port Type (in diesem Fall Output). Schliesslich bestätigt man mit OK und platziert den Output am gewünschten Ort im Schaltbild. Mit einem Rechtsklick verlässt man den Output-Modus.

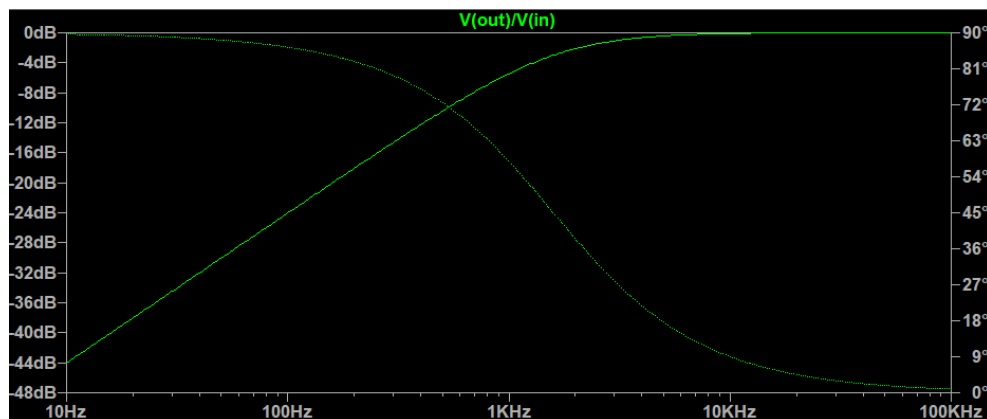
11. Analog zum Output kann man sich auch einen Input machen und diesen an beliebiger Stelle im Schaltbild platzieren.
12. Schliesslich müssen die Elemente verbunden werden. Dazu wählt man das  Symbol, klickt auf das kleine Quadrat am Ende eines Elements (z.B. der Spannungsquelle) und zieht den Cursor zum kleinen Quadrat eines anderen Elements (z.B. Widerstand). Möchte man zwei Elemente mit einer nicht geraden Linie verbinden, so muss dort, wo der Knick hinkommen soll, einmal geklickt werden.

1.4.3 Simulieren

1. Um die Simulation zu konfigurieren klickt man oben im Register auf *Simulate* und dann weiter auf *Edit Simulation Cmd*. Es öffnet sich ein neues Fenster. Im Register *AC Analysis* kann hier beispielsweise das Frequenzintervall festgelegt werden, innerhalb dessen dann simuliert wird (*Start frequency* und *Stop frequency*). Der *Type of sweep* kann entweder als Linear, Oktave oder Dekade gewählt werden. Anschliessend mit OK bestätigen und an beliebiger Stelle im Schaltbild platzieren.
2. Die Simulation kann mit dem  Symbol in der Menüleiste gestartet werden. Es öffnet sich ein zweites Fenster mit einem leeren Diagramm. Danach kann man mit der Maus auf die gewünschte Stelle des Schaltbilds klicken, welche dann im Graphen dargestellt wird. *Beispiel:* Es gibt ein Schaltbild mit einem Input und einem Output (siehe oben). Klickt man auf den *Input* im Schaltbild, wird dieser für die verschiedenen Frequenzen geplottet. Oben im Diagramm steht dann $V(in)$. Macht man einen Rechtsklick auf $V(in)$, so öffnet sich ein Menü:

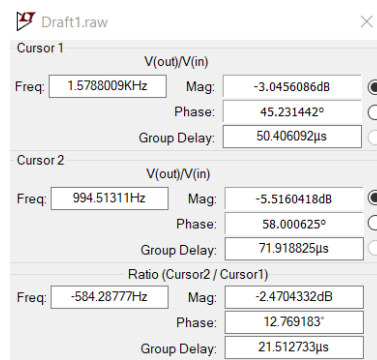


Hier kann man an die Stelle, an der $V(in)$ steht, z.B. schreiben $V(out)/V(in)$. Wenn man mit OK bestätigt, ist anschliessend das Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsspannung $V(out)/V(in)$ zur Frequenz geplottet:



Die etwas dickere Linie entspricht dem Verhältnis $V(out)/V(in)$ (Skala links) und die dünnere Linie stellt die Phase dar (Skala rechts).

3. Um die Grenzkreisfrequenz ω_{gr} zu finden kann man beispielsweise wie folgt vorgehen. Man plottet $V(out)/V(in)$ (siehe oben) und klickt mit der linken Maustaste auf $V(out)/V(in)$. Es öffnet sich das folgende Menü:



Weiter sieht man im Graphen eine vertikale und eine horizontale gestrichelte Linie erscheinen. Klickt man auf diese Linien und hält den Cursor gedrückt, so kann man sie verschieben. Auf diese Weise sucht man die Stelle, an der die Magnitude (als *Mag* bezeichnet im obigen Menü) ungefähr -3 dB ist. Für eine Begründung, weshalb das funktioniert sei auf das Kapitel 1.3.6 verwiesen. Die Grenzkreisfrequenz ω_{gr} kann dann direkt links neben der Magnitude abgelesen werden.

4. Den Roll-Off (siehe Kapitel 1.3.6) kann man ebenfalls mit Hilfe des Cursors bestimmen. Dabei ist auf die Skalierung der Achsen zu achten.
5. Mit dem  Symbol erhält man Zugriff auf das *Control Panel*.

1.4.4 Beispiel

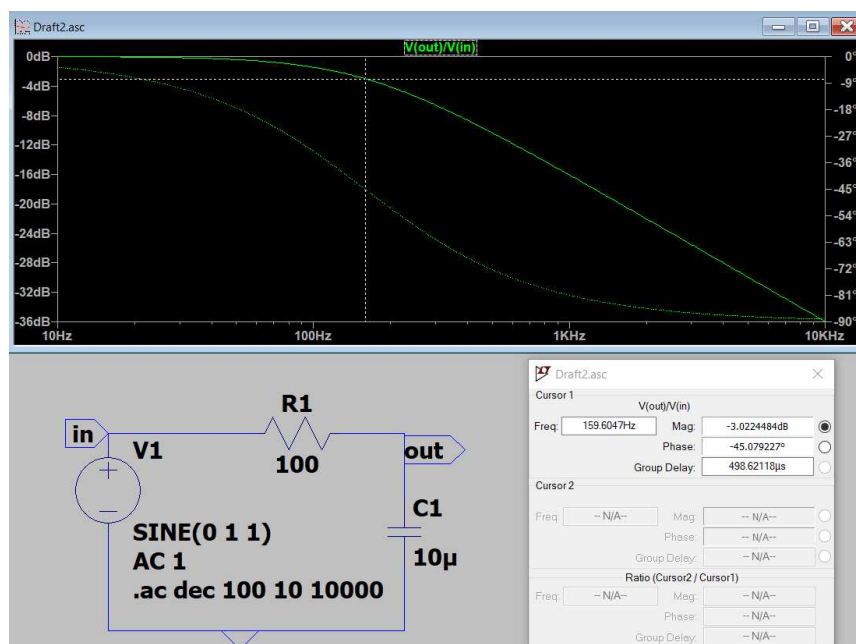


Abbildung 1.28: Eine Sinus-Wechselspannungsquelle (AC) mit einer Amplitude von $U_{in} = 1$ V, ein Input, ein Widerstand mit $R = 100 \Omega$, ein Output und ein Kondensator mit $C = 10 \mu\text{F}$ (eingetragen als 10u) sowie eine Erdung wurden zu einem Schaltkreis verbunden. Es wurde der Frequenzbereich von 10 Hz bis 10 kHz simuliert. Es wurde die Dekade als Type of Sweep gewählt mit 100 Punkten pro Dekade. Mit dem Cursor findet man eine Grenzkreisfrequenz von $\omega_{gr} = 159.6 \pm 1$ Hz bei -3 dB, wenn man das Verhältnis der Spannungen $V(\text{out})/V(\text{in})$ beim Input und Output betrachtet. Der Roll-Off von 19.6 ± 0.5 dB/Dekade lässt sich mit dem Cursor bestimmen.

1.5 Versuchsdurchführung

Für die ersten beiden Aufgaben stehen folgende Elemente aus der Software *LTspice* zur Verfügung, um die gewünschten Filter zu bauen:

- Sinus-Wechselspannungsquelle (AC) mit $U_{\text{in}} = 1 \text{ V}$ Amplitude
- Widerstand mit $R = 1 \text{ k}\Omega$
- Kondensator mit $C = 100 \text{ nF}$
- Input und Output
- Erdung
- Beliebig viele Leitungen zum Verbinden der Elemente

Das Exportieren von Daten aus *LTspice* ist etwas umständlich. Es reicht völlig aus, die Bilder und Diagramme direkt zu verwenden (z.B. als Screenshot) und so ins Protokoll einzufügen. Es müssen keine Diagramme mit *OriginPro* oder ähnlicher Software gezeichnet und ausgewertet werden.

1. Baue aus den oben genannten Elementen in *LTspice* einen *Hochpassfilter* wie in Abbildung 1.29 dargestellt.
 - (a) Führe eine Simulation durch und plote das Verhältnis $V(\text{out})/V(\text{in})$ und die Phasenverschiebung zwischen der Ausgangs- und der Eingangsspannung analog zum obigen Beispiel als Funktion von $\log(\omega)$ für Kreisfrequenzen ω zwischen 10 Hz und 100 kHz.
 - (b) Bestimme die Grenzkreisfrequenz ω_{gr} dieses Hochpassfilters.
 - (c) Miss die Phasenverschiebung φ bei der Grenzkreisfrequenz.
 - (d) Bestimme graphisch mit Hilfe der Cursor den Roll-Off dieses Filters.
 - (e) Die Differenz der Anfangs- zur Endspannung $V(\text{in}) - V(\text{out})$ entspricht dem Spannungsabfall $U(C)$ über dem Kondensator. Plote jetzt im gleichen Diagramm die Phasenverschiebung des Stroms $I(C)$ und des Spannungsabfalls $U(C)$ über dem Kondensator für Frequenzen zwischen 10 Hz und 100 kHz. *Tipp:* Mit Rechtsklick auf das Diagramm und anschliessendem Klick auf *Add Traces* öffnet sich ein Fenster, in dem man bei *Expressions to add* $V(\text{in}) - V(\text{out})$ eintragen kann.

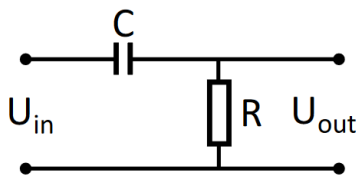


Abbildung 1.29: Hochpassfilter.

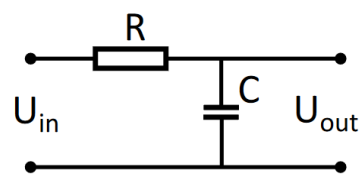


Abbildung 1.30: Tiefpassfilter.

2. Verwende die gleichen Elemente wie zuvor, um in *LTspice* einen *Tiefpassfilter* nach Abbildung 1.30 zu bauen.
 - (a) Führe eine Simulation durch und plote das Verhältnis $V(\text{out})/V(\text{in})$ und die Phasenverschiebung zwischen der Ausgangs- und der Eingangsspannung analog zum vorherigen Beispiel als Funktion von $\log(\omega)$ für Kreisfrequenzen ω zwischen 10 Hz und 100 kHz.

- (b) Miss die Grenzkreisfrequenz ω_{gr} dieses Tiefpassfilters.
 - (c) Bestimme die Phasenverschiebung φ bei der Grenzkreisfrequenz.
 - (d) Miss mit Hilfe der Cursor den Roll-Off dieses Filters graphisch.
 - (e) Die Differenz der Anfangs- zur Endspannung $V(in) - V(out)$ entspricht dem Spannungsabfall $U(C)$ über dem Widerstand. Plote im selben Diagramm die Phasenverschiebung des Stroms $I(R)$ und des Spannungsabfalls $U(R)$ über dem Widerstand für Frequenzen zwischen 10 Hz und 100 kHz.
3. Baue einen RLC -Parallelschwingkreis wie in Abbildung 1.31 mit *LTspice* nach. Der Widerstand habe $R = 1\text{ k}\Omega$, die Spule eine Induktivität von $L = 10\text{ mH}$ und der Kondensator eine Kapazität von $C = 100\text{ nF}$.

- (a) Zeichne die Ausgangsspannung U_{out} als Funktion der Kreisfrequenz ω und bestimme die Resonanzfrequenz ω_0 . Wähle auf der vertikalen Achse eine lineare Skala. Schätze gemäss Formel 1.31 die untere und obere Grenzkreisfrequenz ω_u und ω_o anhand des Plots graphisch durch ablesen ab und miss die Bandbreite $\Delta\omega$.
- (b) Miss den Strom $I(C)$ durch den Kondensator und den Strom $I(L)$ durch die Spule. Betrachte dabei den Resonanzfall bei ω_0 sowie Kreisfrequenzen $\omega < \omega_0$ und $\omega > \omega_0$ mit ω zwischen 10 Hz und 1 GHz und plote $I(C)$ und $I(L)$ als Funktion von $\log(\omega)$ im gleichen Diagramm.
- (c) Miss den maximalen Strom $I_{max}(R)$ im Widerstand. Miss dann den maximalen Strom $I_{max}(C)$ im Kondensator und den maximalen Strom $I_{max}(L)$ in der Spule.

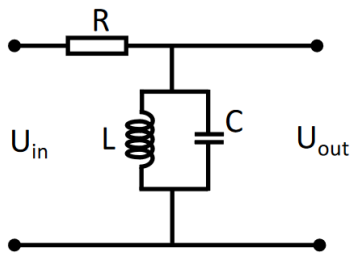


Abbildung 1.31: Ein RLC -Parallelschwingkreis ist gezeigt.

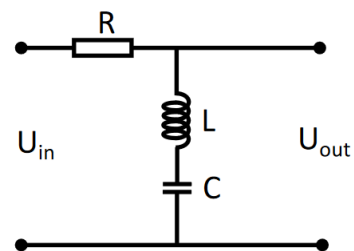


Abbildung 1.32: Dargestellt ist ein RLC -Serieschwingkreis.

4. Baue einen RLC -Serieschwingkreis wie in Abbildung 1.32 mit *LTspice*. Der Widerstand sei $R = 100\text{ }\Omega$, der Kondensator habe eine Kapazität von $C = 10\text{ nF}$ und die Spule eine Induktivität von $L = 10\text{ mH}$.
- (a) Zeichne den Strom I als Funktion der Kreisfrequenz ω und bestimme die Resonanzfrequenz ω_0 . Wähle auf der vertikalen Achse eine lineare Skala. Schätze nach Formel 1.29 die untere und obere Grenzkreisfrequenz ω_u und ω_o anhand des Plots graphisch durch ablesen ab. Miss anschliessend die ungefähre Bandbreite im Graphen.
 - (b) Miss die maximale Spannung $U_{max}(R)$ über den Widerstand. Platziere dann Input und Output so, dass du die Spannung $U_{max}(C)$ über dem Kondensator bzw. $U_{max}(L)$ über der Spule messen kannst. Wähle für diese Messungen jeweils eine lineare Skala auf der vertikalen Achse.

1.6 Auswertung

Bevor du mit der Auswertung und dem protokollieren dieses Versuchs beginnst, beachte bitte die folgenden wichtigen Punkte:

- Es handelt sich hier nicht um ein Experiment, sondern um eine Simulation. Wenn man entsprechend viele Punkte simuliert, erreicht man eine beliebige Genauigkeit. Eine Fehlerrechnung ergibt bei simulierten Daten keinen Sinn und ist deshalb für den Versuch *IZ3 Filter* überflüssig.
- Der Theorieteil ist in dieser Versuchsanleitung sehr ausführlich. Dies soll helfen, den Versuch und die dahinter stehende Physik besser zu verstehen - eine vertiefte Lektüre ist sehr zu empfehlen. Beim Schreiben des Protokolls bitte im Theorieteil nur die Funktionsweise der Schwingkreise und Filter beschreiben und die später für die Auswertung tatsächlich benötigten Formeln einführen (maximal zwei bis drei Seiten). Das Protokoll darf sich gerne auf die Versuchsanleitung beziehen, indem man beispielsweise schreibt, dass die Formel XY in der Versuchsanleitung, Kapitel 2.4.1, hergeleitet wird. Schliesslich sind die Fragen zur Vorbereitung sowie die Fragen aus der Auswertung in wenigen Sätzen zu beantworten.

Die Aufgabennummern beziehen sich auf die Nummern im Kapitel 1.5. Beantworte alle Fragen schriftlich ins Protokoll.

1. (a) Erkläre anhand des Graphen, bei dem du das Verhältnis $V(\text{out})/V(\text{in})$ als Funktion von $\log(\omega)$ eingezeichnet hast, warum es sich bei Abbildung 1.29 um einen Hochpassfilter handelt.
(b) Berechne die Grenzfrequenz für diesen Filter nach der Formel $\omega_{gr} = 1/RC$ (siehe Kapitel 1.3.6) und vergleiche diesen Wert mit deiner Messung.
(c) Nach der Theorie in Kapitel 1.3.6 ist die Phasenverschiebung zwischen der Eingangs- und der Ausgangsspannung bei der Grenzfrequenz ω_{gr} genau 45° . Kannst du das mit deiner Messung am Hochpassfilter bestätigen?
(d) Gemäss der Erläuterung in Kapitel 1.3.6 ist der Roll-Off für Filter erster Ordnung rund 6 dB/Oktave bzw. 20 dB/Dekade. Stimmt das mit deiner Messung beim Hochpassfilter überein?
(e) Aus der Theorie (siehe Gleichung 1.19) wissen wir, dass bei einem Kondensator der Strom $I(t)$ der Spannung $U(t)$ um $+\pi/2$ voraus eilt. Ist diese Aussage mit deinen Messergebnissen konsistent?
2. (a) Erkläre mit Hilfe des Graphen, bei welchem du das Verhältnis $V(\text{out})/V(\text{in})$ als Funktion von $\log(\omega)$ eingezeichnet hast, warum es sich bei Abbildung 1.30 um einen Tiefpassfilter handelt.
(b) Berechne für deinen Tiefpassfilter die Grenzkreisfrequenz nach Formel $\omega_{gr} = 1/RC$ (siehe Kapitel 1.3.6) und vergleiche das Ergebnis mit dem Wert aus der Simulation.
(c) Nach der Theorie in Kapitel 1.3.6 ist die Phasenverschiebung zwischen der Eingangs- und der Ausgangsspannung bei der Grenzfrequenz ω_{gr} genau 45° . Kannst du das mit deiner Messung am Tiefpassfilter bestätigen?
(d) Gemäss der Erläuterung in Kapitel 1.3.6 ist der Roll-Off für Filter erster Ordnung rund 6 dB/Oktave bzw. 20 dB/Dekade. Stimmt das mit deiner Messung beim Tiefpassfilter überein?

- (e) Gleichung 1.20 besagt, dass Strom $I(t)$ und Spannung $U(t)$ bei rein ohm'schen Widerständen in Phase sind, das heisst $\varphi = 0$. Kannst du das zeigen?
3. (a) Um welche Art von Filter handelt es sich? Berechne dann weiter mit Hilfe der Formel 1.28 die Resonanzfrequenz ω_0 für diesen RLC -Parallelschwingkreis und vergleiche den Wert mit deiner Messung. Bestimme mit Hilfe der Formel 1.32 die theoretische Bandbreite und gib mit Formel 1.33 die Güte dieses Schwingkreises an. Ist die gemessene Bandbreite konsistent mit der berechneten?
- (b) Was passiert bei Resonanz? Was beobachtet man für $\omega < \omega_0$ und was für $\omega > \omega_0$?
- (c) Vergleiche die Werte $I_{\max}(R)$, $I_{\max}(C)$ und $I_{\max}(L)$. Was stellt man fest? Wie lässt sich das erklären? Weshalb ist es wichtig, dass man dieser Sache grosse Beachtung schenkt?
4. (a) Welche Art von Filter ist das? Bestimme danach mit Hilfe der Formel 1.27 die Resonanzfrequenz ω_0 für den RLC -Serienschwingkreis und vergleiche diesen Wert mit deiner Messung. Berechne weiter mit Hilfe der Formel 1.30 die theoretische Bandbreite und gib mit Formel 1.33 die Güte dieses Schwingkreises an. Entspricht die gemessene Bandbreite derjenigen, die du berechnet hast?
- (b) Vergleiche deine Maximalwerte $U_{\max}(R)$, $U_{\max}(L)$ und $U_{\max}(C)$ für die Spannung. Was beobachtetest du? Wie lässt sich das erklären? Inwiefern kann dies ein Problem darstellen?

1.7 Literatur

- Alexander Eichler, *Wechselströme in R, L, und C*, Versuchsanleitung des Praktikum Physik, ETH Zürich
- Wolfgang Demtröder, *Experimentalphysik 2*, 1. Auflage, Springer-Verlag
- *LTspice*, Analog Device, <https://www.analog.com>, Stand April 2020

A.1 Cheat Sheet für LTspice

LTspice HotKeys			
	Schematic	Symbol	Waveform
Modes	ESC – Exit Mode F3 – Draw Wire F5 – Delete F6 – Duplicate F7 – Move F8 – Drag F9 – Undo Shift+F9 – Redo	ESC – Exit Mode F5 – Delete F6 – Duplicate F7 – Move F8 – Drag F9 – Undo Shift+F9 – Redo	F5 – Delete F9 – Undo Shift+F9 – Redo
	Ctrl+Z – Zoom Area Ctrl+B – Zoom Back Space – Zoom Fit Ctrl+G – Toggle Grid U – Mark Unconn. Pins A – Mark Text Anchors Alt+Click – Power Ctrl+Click – Attr. Edit Ctrl+H – Halt Simulation	Ctrl+Z – Zoom Area Ctrl+B – Zoom Back Space – Zoom Fit Ctrl+G – Toggle Grid U – Mark Unconn. Pins A – Mark Text Anchors Ctrl+H – Halt Simulation	Ctrl+Z – Zoom Area Ctrl+B – Zoom Back Ctrl+E – Zoom Extents Ctrl+G – Toggle Grid U – Clear Ctrl+A – Add Trace Ctrl+Y – Vertical Autorange Ctrl+Click – Average Ctrl+H – Halt Simulation
	R – Resistor C – Capacitor L – Inductor D – Diode G – GND S – Spice Directive F2 – Component F4 – Label Net Ctrl+E – Mirror Ctrl+R – Rotate	R – Rectangle C – Circle L – Line D – Arc A – Arc T – Text Ctrl+E – Mirror Ctrl+R – Rotate	
View			
Place			
Command Line Switches			
Flag	Short Description		
-ascii	Use ASCII raw files. (Degrades performance!)		
-b	Run in batch mode.		
-big or -max	Start as a maximized window		
-encrypt	Encrypt a model library		
-fastAccess	Convert a binary raw file to Fast Access Format		
-netlist	Convert a schematic to a netlist		
-novino	Prevent use of VINE(Linux) workarounds		
-PCBnetlist	Convert a schematic to a PCB netlist		
-registry	Store user preferences in the registry		
-Run	Start simulating the schematic on open		
-SOI	Allow MOSFET's to have up to 7 nodes in subcircuit		
-uninstall	Executes one step of the uninstallation process		
-wincs	Force use of WINE(Linux) workarounds		

©2018 Analog Devices Inc. All rights reserved. Reproduction or
distribution of this document is prohibited without the
written permission of Analog Devices, Inc.
LTspice v4.1.0.0

analog.com



LTspice

ANALOG
DEVICES

BEFORE YOU BUY, ASK YOUR SALES REPRESENTATIVE
FOR THE LATEST INFORMATION ON OUR PRODUCTS

Simulator Directives – Dot Commands	
Command	Short Description
.AC	Perform a Small Signal AC Analysis
.BACKNAMES	Annotate Subcircuit Pin Names on Port Currents
.DC	Perform a DC Source Sweep Analysis
.END	End of Netlist
.ENDS	End of Subcircuit Definition
.FOUR	Compute a Fourier Component
.FUNC	User Defined Functions
.FREQ	Download a File Given the URL
.GLOBAL	Declare Global Nodes
.IC	Set Initial Conditions
.INCLUDE	Include another File
.LIB	Include a Library
.LOADBIAS	Load a Previously Solved DC Solution
.MEASURE	Evaluate User-Defined Electrical Quantities
.MODEL	Define a SPICE Model
.NET	Compute Network Parameters in a AC Analysis
.NOISE	Supply Hints for Initial DC Solution
.NOISE	Perform a Noise Analysis
.OP	Find the DC Operating Point
.OPTIONS	Set Simulator Options
.PARAM	User-Defined Parameters
.SAVE	Limit the Quantity of Saved Data
.SAVEBIAS	Save Operating Point to Disk
.STEP	Parameter Sweeps
.SUBCKT	Define a Subcircuit
.TEMP	Temperature Sweeps
.TF	Find the DC Small-Signal Transfer Function
.TRAN	Do a Nonlinear Transient Analysis
.WAVE	Write Selected Nodes to a WAV file

Suffix	Suffix	Constants
f	1e-15	E 2.7182818284590452354
p	1e-12	Pi 3.14159265358979323846
n	1e-9	K 1.3906835e-23
u	1e-6	Q 1.60217662e-19
m	1e-3	TRUE 1
M	25.4e-6	FALSE 0