

IIW1

Modul Wärmelehre

Kinetische Gastheorie

Ziel dieses Versuches ist das Kennenlernen einiger Grundbegriffe und -gedanken der statistischen Mechanik des klassischen Gases sowie das Nachprüfen der Geschwindigkeitsverteilung und der Barometrischen Höhenformel an einem Modellgas.

Versuch IIW1 - Kinetische Gastheorie

Ziel dieses Versuches ist das Kennenlernen einiger Grundbegriffe und -gedanken der statistischen Mechanik des klassischen Gases sowie das Nachprüfen der Geschwindigkeitsverteilung und der Barometrischen Höhenformel an einem Modellgas.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

- Gegeben sei ein 'Gas', welches aus zwei punktförmigen Teilchen besteht, die sich gegenseitig anziehen, wenn ihre Entfernung grösser ist als ein bestimmter Wert r_0 , und abstossen, falls sie kleiner ist. Die Abstossung soll für kleine Abstände so stark sein, dass sie auf keinen Fall auf einen Punkt zusammenfallen können, mit welcher Anfangsgeschwindigkeit sie auch immer aufeinander geschossen werden. Zu einem beliebigen Zeitpunkt haben sie die (Relativ-) Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$ und einen Abstand $r > r_0$. Wie verhält sich das System? Dasselbe mit vielen Teilchen?
- Wie muss Gleichung 1.1 modifiziert werden, wenn man Eigenvolumen und Wechselwirkungen berücksichtigt?
- Was ist die Grössenordnung von E_{th} bei Zimmertemperatur ($T \approx 290K$)? Welche Grössenordnung hat damit die Geschwindigkeit eines Sauerstoffmoleküls? ($m \approx 54 \times 10^{-27} kg$ - erst schätzen, dann rechnen)
- Der Boltzmannfaktor wird klein, wenn die Energie E des Zustandes, dessen Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll, gross ist gegen die thermische Energie. Was bedeutet das anschaulich?
- Wieso hat der Exponent der Gleichung 1.6 gerade diese Gestalt? Welchen Mittelwert für \vec{v} liefert diese Verteilung? (nicht rechnen!)
- Erläutere die Formel 1.11.

1.2 Theorie

1.2.1 Theoretische Beschreibung eines Gases

Die kinetische Gastheorie versucht, die Eigenschaften eines Gases mit folgendem Modell zu erklären:

Viele kleine Teilchen (Moleküle) befinden sich in einem begrenzten Raumgebiet (Volumen V) und wechselwirken miteinander (es wirken Kräfte zwischen ihnen, die ihre Bewegung beeinflussen). Man kann diese Teilchen entweder vereinfacht als Punkte beschreiben, oder aber ihr *Eigenvolumen* berücksichtigen. Genauso kann man ihre Wechselwirkungen (wenn man will, auch die mit dem Rand des Volumens) in die Betrachtungen einbeziehen. Erinnerung man sich der *phänomenologischen Thermodynamik* (das System wird durch wenige makroskopisch messbare Grössen wie Temperatur T , Druck p usw. beschrieben), so führt z.B. die Berücksichtigung der Wechselwirkungen zu einer Korrektur des Druckes eines wechselwirkungsfreien Gases (der Druck p_0 des wechselwirkungsfreien Gases muss dann ein wenig verändert werden: $p = p_0 - \Delta p$ (warum?)).

Beim idealen Gas vernachlässigt man beides. Es gilt dann das bekannte Gesetz, welches die Grössen p, T, V miteinander verknüpft (*Zustandsgleichung des idealen Gases*):

$$\frac{pV}{T} = \text{konstant} \quad (1.1)$$

Man stelle sich nun als Modell stets einen Kasten mit vielen, sagen wir N , gleichen Teilchen mit der jeweiligen Masse m vor. Man denke daran, dass im allgemeinen auch äussere Felder (z.B. elektrische oder Gravitationsfelder) noch Kräfte auf die Teilchen ausüben können. Weiter soll jedes Teilchen den Gesetzen der klassischen Mechanik (die Quantenmechanik lassen wir beiseite) unterliegen. Die wesentlichen Grössen, die ein solches Teilchen beschreiben, sind

die Ortskoordinaten und die Geschwindigkeiten. Erinnerung man sich an die Definition der Beschleunigung $\vec{a} := \frac{d}{dt}\vec{v}$ und dem Kraftgesetz $\vec{F} = m\vec{a}$, so hat man für jedes Teilchen (sie seien durchnummeriert mit $i = 1, \dots, N$) die Gleichung

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \vec{F}_i \quad (1.2)$$

zu lösen. Das sind insgesamt $3N$ Differentialgleichungen, wobei die Kräfte von den Koordinaten *aller* Teilchen abhängen. Eine solche Anzahl ($N \approx 10^{23}$) von Gleichungen explizit lösen zu wollen, ist in den meisten Fällen unmöglich. Im übrigen hätte man nach einer solchen Anstrengung - sollte sie geglückt sein - nicht viel gewonnen. Damit der Praktiker etwas damit anfangen kann, muss der Zustand des Systems (d.h. in diesem Fall alle Koordinaten und Geschwindigkeiten) zu einem Zeitpunkt bekannt sein; dann kann man mit der Lösung der Differentialgleichung die Zustände zu allen anderen Zeiten berechnen. Dazu müsste man alle $6N$ Größen kennen! (Einer der sowas weiss, heisst *Maxwellscher Dämon*. Es sei noch erwähnt, dass ein solcher prinzipiell nicht existieren darf.)

1.2.2 Boltzmann-Statistik

Ein Ausweg aus diesem Dilemma liefert die *Statistik*. Zur statistischen Beschreibung unseres Systems sucht man eine *Wahrscheinlichkeitsdichte* $f(\vec{x}, \vec{v})$, d.h. eine Funktion von \vec{x} und \vec{v} , die folgende Bedeutung hat: die Grösse

$$f(\vec{x}, \vec{v}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \Delta v_1 \Delta v_2 \Delta v_3 \quad (1.3)$$

gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man ein Teilchen im Volumen $V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ um den Ort \vec{x} und im Geschwindigkeitsvolumen $\Delta v_1 \Delta v_2 \Delta v_3$ um die Geschwindigkeit \vec{v} findet (d.h. also irgendwo zwischen $x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}$ und $x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}$, $x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}$ und $x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}$, ... usw. und mit einer Geschwindigkeit zwischen $v_1 - \frac{\Delta v_1}{2}$ und $v_1 + \frac{\Delta v_1}{2}$, ... usw.). Die theoretische Aufgabe der statistischen Physik ist es, für das jeweils gegebene System f zu finden. Hat man dies erfolgreich erledigt, ist man in der Lage, alle möglichen physikalischen Größen als Mittelwerte sowie ihre statistischen Schwankungen zu berechnen. Mehr als diese einführenden Worte soll uns jedoch nicht interessieren, einzig das für uns wichtige Resultat wird gebraucht, wobei wesentlich ist, dass wir die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander, bis auf deren Stösse untereinander, vernachlässigen:

1. **f ist eine Funktion der Energie des Zustandes (\vec{x}, \vec{v}) allein** (diese enthält natürlich die Koordinaten und Geschwindigkeiten):

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = f(E(\vec{x}, \vec{v})) = f(E) \quad (1.4)$$

2. **f hat folgende Gestalt:**

$$f(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}} \quad (1.5)$$

(in Worten: f ist proportional zum Boltzmannfaktor).

T ist die Temperatur in Kelvin, $k = 1.380662 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ die Boltzmannkonstante. Eine im mikroskopischen Teilchenbild neue Grösse, die hier auftaucht, ist die Temperatur. Ihre Definition im Rahmen dieser Theorie würde zu weit führen. Immerhin bekommt man ein Gefühl, wenn man den Term kT , der ja die Dimension einer Energie hat, als *thermische Energie* des Teilchens interpretiert. Damit meint man folgendes: Energie kann geordnet oder ungeordnet im System stecken. Den letzteren Anteil bezeichnet man als thermische Energie. Ein einfaches Beispiel ist

ein ideales Gas, welches sich als Ganzes bewegt. Die gesamte Energie des Systems setzt sich hier zusammen aus der kinetischen Energie der Translationsbewegung des Gases und der ungeordneten Bewegung der einzelnen Teilchen. Das heisst nichts anderes, als dass es eine nichtverschwindende mittlere Geschwindigkeit gibt, die wirklichen Teilchengeschwindigkeiten sind um diese herum verteilt. Die Energie, die in der ungeordneten Bewegung steckt, kann man nun formal auf die einzelnen Teilchen verteilen; diese Grösse nennt man *thermische Energie* des Teilchens. Für ein ideales Gas findet man für die thermische Energie eines Teilchens eines einatomigen Gases $E_{th} = 3(\frac{1}{2}kT)$ (für mehratomige Gase ändert sich der Faktor, hier 3. Er gibt die Anzahl der Freiheitsgrade an, hier sind es die drei Bewegungsrichtungen. Jeder Freiheitsgrad bekommt also im Mittel $\frac{1}{2}kT$ an Energie.) Gerechtfertigt und präzisiert wird dies im sogenannten *Äquipartitionsprinzip*, welches in einschlägiger Literatur zu finden ist.

1.2.3 Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung und die Barometrische Höhenformel

Die Maxwellverteilung

Im Fall eines idealen Gases liefert die Theorie einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül eines idealen Gases um die Geschwindigkeit \vec{v} herum zu finden. Die Anzahl dN und die Temperatur T der Moleküle eines idealen Gases mit N Teilchen, die im Geschwindigkeitsvolumen $d^3v := \Delta v_1 \Delta v_2 \Delta v_3$ um die Geschwindigkeit \vec{v} verteilt sind, ist

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} d^3v \quad (1.6)$$

Was interessiert, ist der mittlere Geschwindigkeitsbetrag (\bar{v}), oder auch das mittlere Geschwindigkeitsquadrat. Bei Mittelung über alle Richtungen erhält man

$$dN(v) = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{kT}} 4\pi v^2 dv \quad (1.7)$$

$\frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ in Abhängigkeit von v ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Es gibt verschiedene Arten eine mittlere Geschwindigkeit der Teilchen anzugeben, diese sind jedoch durch konstante Umrechnungsfaktoren miteinander verbunden.

- wahrscheinlichste Geschwindigkeit. Man erhält sie aus einer Kurvendiskussion von (1.7). Das Maximum der Kurve liegt bei:

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (1.8)$$

- mittlere Geschwindigkeit. Sie ist durch das arithmetische Mittel gegeben und lautet:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1.9)$$

- mittlere quadratische Geschwindigkeit. Sie ist durch das quadratische Mittel gegeben und lautet:

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (1.10)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die kinetische Energie linear mit der Temperatur skaliert.

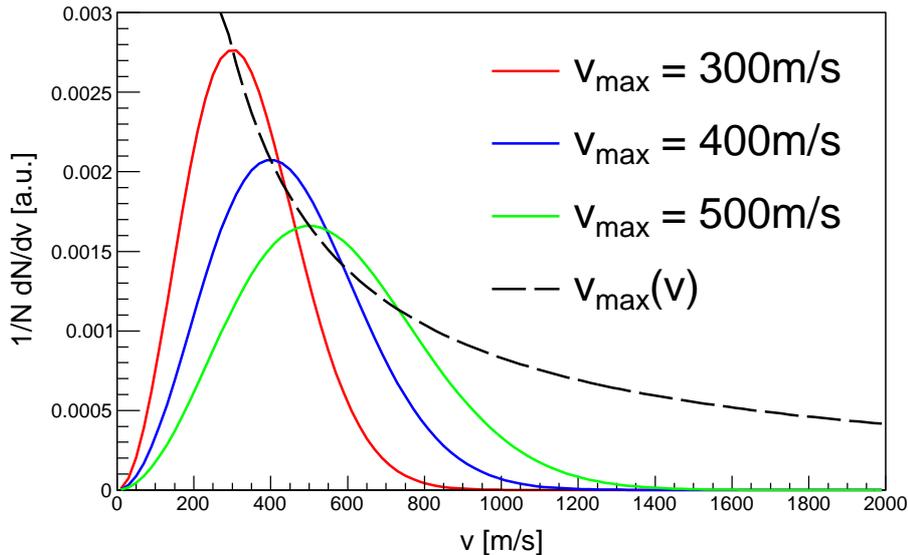


Abbildung 1.1: Maxwell-Boltzmann-Verteilung für drei verschiedene Maximalgeschwindigkeiten.

Die Barometrische Höhenformel

Folgende Frage lässt sich aus dieser Theorie recht einfach beantworten: Wie gross ist der Druck in einem idealen Gas in einem Schwerfeld $F = mg$ (in z -Richtung)? Dazu setzt man voraus, dass die Temperatur unabhängig von der Höhe ist. Man findet für den Druck $p(h)$ in der Höhe h

$$p(h) = p(h_0) e^{-\frac{mg(h-h_0)}{kT}} \quad (1.11)$$

1.3 Experiment

1.3.1 Versuchszubehör

Komponente	Anzahl
Apparat mit Reservoir und Vibrationsquelle	1
Stroboskop	1
fächerförmiger Auffangbehälter	1
Newtonmeter	1
Stativ	1
Plastikkügelchen	viele
Metallkügelchen	viele
Reagenzgläser	ein paar
Reagenzlashalter	1

1.3.2 Versuchsaufbau und Justage

Die Teilchen des Gases werden durch Plastik- (für den Geschwindigkeitsverteilungsversuch) resp. durch Metallkugeln (Höhenformelversuch) dargestellt. Statt die Kugeln abzuzählen, bestimmt man die erforderliche Anzahl durch wägen. Am häufigsten werden etwa 400 Kugeln gebraucht, es ist daher sinnvoll, stets einige Reagenzgläser mit 200 oder 400 Stück bereit zu

haben. Bei Versuchen zur Verteilung der Geschwindigkeit muss die pro Minute ausgeworfene Anzahl wieder nachgefüllt werden (ca. 45 pro Minute). Das Einfüllen erfolgt am besten bei laufendem Motor über 10 (siehe Abbildung 1.2). Soll das Gerät entleert werden, wird die Glasscheibe hochgezogen, welche auf der Seite der am Gehäuseteil befindlichen Rinne liegt (dazu die 4 Schrauben lösen). Die Plastikugeln fängt man am besten mit ihrem Plastikbehälter auf, die Metallkugeln mit dem Becherglas.

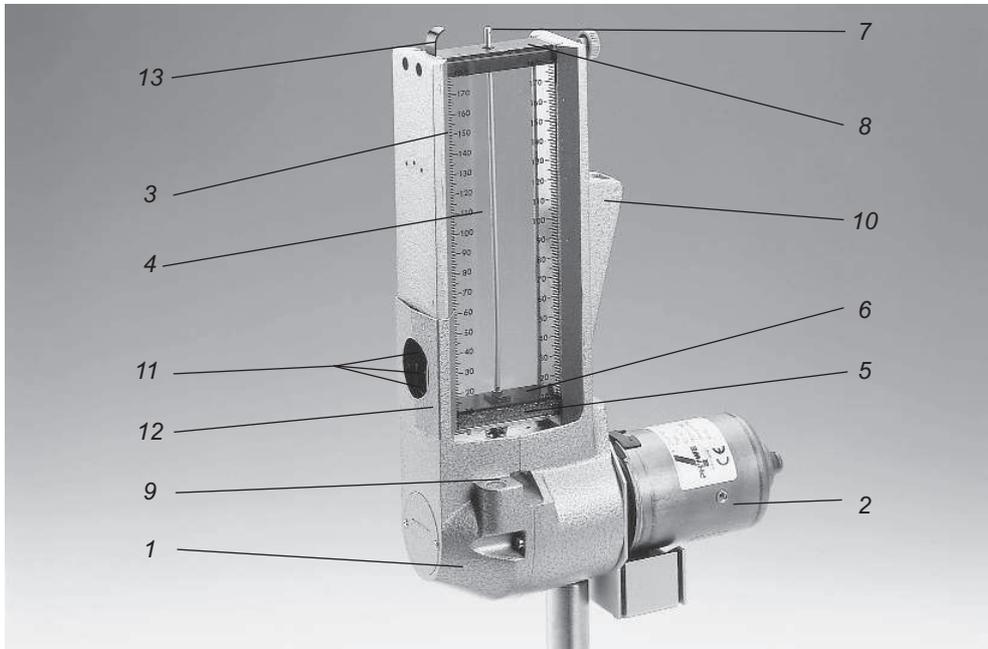


Abbildung 1.2: Erläuterung zur Versuchsanordnung

- | | | |
|-----------------|----------------------------|-------------------|
| 1: Gehäuse | 6: Deckel | 11: Öffnungen |
| 2: Elektromotor | 7: Führungstange | 12: Halteschieber |
| 3: Wände | 8: Abschlussstück | 13: Sperrriegel |
| 4: Glasscheiben | 9: Dosenlibelle | |
| 5: Bodenplatte | 10: trichterartiger Ansatz | |

1.3.3 Durchführung

Versuch zur Geschwindigkeitsverteilung

In diesem Aufgabenteil soll versucht werden, die *Maxwell*'sche Geschwindigkeitsverteilung anhand eines (Modell-)Gases zu bestätigen. Dazu muss die Versuchsanordnung mit dem richtigen Kunststoffzwischenstück ausgestattet werden. Dieses wird in die Mulde (siehe Nr. 11 in Abbildung 1.2) hinter der Blechblende eingelegt und von dieser gehalten. Als Gas eignen sich etwa 800 Plastikugeln, die Kammerhöhe sollte ca. 60 – 65mm sein (wieso nicht beliebig groß?). Um 800 Plastikugeln zu zählen, kannst du auch 10 davon wiegen und dann das Gewicht für 800 berechnen. Die Frequenz soll sinnvoll gewählt werden (erst mal ausprobieren! Man sollte mit dem Gerät ein wenig vertraut werden, bevor man misst). Das Stroboskop dient dabei zur Frequenzbestimmung. In dieser Aufgabe braucht man ausserdem den Fächer. Fülle die Plastikugeln ein und starte den Motor. Die Plastikugeln beginnen im Gefäß umherzuschlagen und pro Zeiteinheit fliegen einige aus dem Gerät in den Fächer. Miss nach

einer gewissen Zeit die Verteilung der Kügelchen in dem Fächer. Da die Theorie von einer konstanten Teilchenzahl ausgeht, muss auch hier die Zahl der Kügelchen konstant gehalten werden. Wenn man mit 800 Kügelchen startet, kann im Rahmen dieses Experiments eine Abnahme um 50 Kügelchen vernachlässigt werden. Spätestens dann sollte aber nachgefüllt werden.

- Zähle die Anzahl der Plastikkugeln in jedem Abschnitt für drei verschiedene Frequenzen. Bestimme jeweils die Frequenz mit dem Stroboskop.
- Miss die horizontalen Strecken zwischen der Austrittsöffnung der Modellgas-Kammer und jeder einzelnen Kammer des Auffang-Fächers. Notiere Dir sowohl den Beginn, wie auch das Ende der Kammer.
- Miss den vertikalen Abstand zwischen der Austrittsöffnung und dem Fächer.

Versuch zur Höhenformel

Hier verwendet man die schwereren Metallkugeln. Wieder wähle man eine sinnvolle Frequenz aus (ein möglichst grosser Bereich in der Höhendifferenz ist zu messen!), benütze den Kraftmesser, der vorsichtig an die Führungsstange gehängt wird. Die Kraft, die der Kraftmesser dann anzeigt, setzt sich zusammen aus der Gewichtskraft des Stempels und dem Druck, den die Kugeln auf diesen ausüben.

Hier interessiert die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe, nicht aber die Abhängigkeit von der Temperatur. Die Frequenz, die in diesem Modell für die Temperatur steht, bleibt während der Messung konstant !!!

- Miss die Kraft auf den Stempel als Funktion der (mittleren) Höhe des Stempels.

1.4 Auswertung

Versuch zur Geschwindigkeitsverteilung

- Bestimme zu jedem Fach die dazugehörige Geschwindigkeit aus dem schiefen Wurf.
- Trage die Anzahl der Kugeln gegenüber dieser Geschwindigkeit auf.
- Fitte die Funktion

$$f(x) = Ax^2e^{-Bx^2} \quad (1.12)$$

wobei die Koeffizienten aus (1.7) folgen:

$$A = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (1.13)$$

$$B = \frac{m}{2kT} \quad (1.14)$$

- Berechne aus A und B die Anzahl der Teilchen N und vergleiche sie mit dem gemessenen Wert.
- Berechne zudem aus der gemessenen Anzahl Teilchen N und ihrer Masse m die Temperatur des Modellgases.
- Der Fit zeigt eine Abweichung. Wieso?

Versuch zur Höhenformel

- Bestimme aus der abgelesenen Kraft den Druck, den das Modellgas auf den Stempel ausübt. Lies dazu die Gewichtskraft des Stempels in Ruhe ab und miss die Fläche des Stempels. Dies ist auch ohne Entfernen des Stempels möglich.
- Bestimme aus den Messdaten grafisch die Temperatur Deines Modellgases. Warum weicht sie so stark von der Zimmertemperatur ($\sim 300\text{K}$) ab?