

IFO

Modul Fehlerrechnung

Fehleranalyse

In diesem einführenden Versuch wird mittels eines Pendels die sinnvolle Durchführung und Auswertung eines wissenschaftlichen Experimentes veranschaulicht. Des Weiteren soll der Umgang mit den dazu notwendigen statistischen Mitteln vertieft und anhand der durchgeführten Messung angewendet werden.

Versuch IF0 - Fehleranalyse

In diesem einführenden Versuch wird mittels eines Pendels die sinnvolle Durchführung und Auswertung eines wissenschaftlichen Experimentes veranschaulicht. Des Weiteren soll der Umgang mit den dazu notwendigen statistischen Mitteln vertieft und anhand der durchgeführten Messung angewendet werden.

1.1 Motivation

Ein wesentliches Ziel dieses Praktikums ist die Vermittlung von Kompetenz und das Sammeln von Erfahrung in Bezug auf die qualitative und quantitative Bewertung von Messergebnissen. Dies ist ein wesentlicher Bestandteil jeder Arbeit in der Experimentalphysik und von essentieller Bedeutung, wenn es gilt, die Gültigkeit eines theoretischen Modells zu verifizieren oder gegebenenfalls zu widerlegen. Jede Messung, egal ob in den Naturwissenschaften oder anderswo, unterliegt prinzipiell immer zufälligen und systematischen Abweichungen, welche allgemein als *Messfehler* bzw. *Messunsicherheit* bezeichnet werden.

In diesem ersten Versuch des Praktikums soll anhand eines einfachen Experiments erlernt werden, welche Arten von Messunsicherheiten auftreten können, wie sie quantifiziert werden können und wie sich die Unsicherheiten einzelner Messgrößen auf das Endresultat auswirken (*Fehlerfortpflanzung*). Von den Praktikanten wird erwartet, dass die hier erlernten Methoden im weiteren Verlauf des Praktikums möglichst eigenständig auf alle zu absolvierenden experimentellen Arbeiten angewandt werden. Jedes zukünftige Versuchsprotokoll muss eine ausreichende Fehleranalyse der gewonnenen Messdaten enthalten, andernfalls wird die Durchführung des Versuchs nicht anerkannt und das Experiment muss wiederholt werden.

1.2 Statistische Grundlagen

Das Ziel einer Messung ist die bestmögliche Bestimmung des sogenannten *Wahren Wertes* einer physikalischen Größe. Dieser wahre Wert ist jedoch ein theoretisches Konstrukt und der gemessene Wert unterscheidet sich von diesem durch die bereits erwähnten zufälligen und systematischen Messunsicherheiten, welche sich niemals vollständig ausschliessen lassen. Das Ziel des Experimentierenden ist es nun, die betreffenden Fehlerquellen zu identifizieren und deren Einfluss soweit wie möglich zu minimieren. Im weiteren Verlauf des Studiums wird der Student lernen, dass der klassische Charakter der Messgröße, welcher immer die Existenz des wahren Wertes voraussetzt, in der Quantenmechanik ohnehin seine Bedeutung verliert. Letzten Endes sind dann nur noch Aussagen über die Wahrscheinlichkeit einer Messgröße/Observable möglich.

Im Praktikum wird jedoch die Ungenauigkeit des Messverfahrens stets um viele Größenordnungen über der Unsicherheit/Schwankungsbreite des wahren Wertes liegen, so dass dessen Existenz bedenkenlos angenommen werden kann.

1.2.1 Der Messwert und seine statistische Schwankung

Was heisst messen? In der Physik versteht man darunter die Ermittlung des Wertes einer physikalischen Größe mit Hilfe von Gerätschaften und technischen Hilfsmitteln mit dem Ziel, dem wahren Wert der betreffenden physikalischen Größe möglichst nahe zu kommen.

Jedoch unterliegt solch eine Prozedur diversen Einflüssen, so dass eine Wiederholung der Messung normalerweise nicht erneut dasselbe Resultat liefert. Man sagt, die Messwerte seien verteilt und es ist nun von enormer Wichtigkeit die so genannte Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ des Messwertes x_i zu kennen. Aus dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik folgt, dass für unabhängige, identische Zufallsvariablen der Erwartungswert und die Varianz endlich sind. Die zugehörige Verteilungsfunktion der Messwerte wird als Gaussverteilung, oder *Normalverteilung* bezeichnet. Im Fall der Messgröße x_i lautet diese:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet μ den sogenannten *Mittelwert* und σ die *Standardabweichung*. Zu dieser kontinuierlichen Verteilung gelangt man jedoch erst nach Bildung des Grenzwertes für eine unendliche Zahl n von Messwerten x_i . Für eine endliche Anzahl von Messwerten lassen sich die folgenden beiden Abschätzungen machen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Mittelwert} \quad (1.2)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{Standardabweichung des Einzelwertes} \quad (1.3)$$

Gelegentlich spricht man auch von der Standardabweichung der Stichprobe um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um die Standardabweichung *eines einzelnen Messwertes* handelt. Dies darf nicht mit der als *Standardabweichung des Mittelwertes* bezeichneten Grösse verwechselt werden:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} \quad (1.4)$$

Um eine Reihe von Messwerten statistisch hinreichend zu charakterisieren, sollte der Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes angegeben werden. Wenn also dieselbe physikalische Grösse hundertmal gemessen wurde ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$), so lautet das anzugebende Resultat:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \quad (1.5)$$

Im Intervall $\pm\sigma_{\bar{x}}$ befinden sich dann 68.63% aller Messwerte. Weiterhin gilt, dass sich in den Intervallen $\pm 2\sigma_{\bar{x}}$ und $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$ 95.4% bzw. 99.7% aller Messwerte befinden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom Vertrauensintervall bzw. vom Vertrauensniveau. Am gebräuchlichsten ist ein Vertrauensintervall von 0.95, d.h. 95% aller Messwerte sollen innerhalb dieses Intervalls liegen. Dieser Bereich ist in etwa identisch mit dem oben bereits erwähnten $2\sigma_{\bar{x}}$ Intervall. Daher ist die Beziehung

$$\Delta\bar{x} = \frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (1.6)$$

sehr gebräuchlich und wird gemeinhin auch als *statistischer Fehler des Mittelwertes* bezeichnet.

1.2.2 Systematische Messunsicherheiten

Nach Berücksichtigung der statistischen Schwankung erhält man, wie im vorherigen Abschnitt dargelegt wurde, den Mittelwert \bar{x} aller gemessenen Werte. Dieser ist jedoch nach wie vor nicht identisch mit dem wahren Wert. Die Differenz zwischen wahren Wert und Mittelwert wird als *systematischer Messfehler* bezeichnet. Dieser ist in der Regel wesentlich schwieriger zu quantifizieren als der statistische Fehler. In der Regel erhält man den systematischen Fehler nur durch Vergleich mehrerer Messapparaturen/-geräte. An dieser Stelle kommt die Kalibrierung der entsprechenden Messgeräte ins Spiel. Beachten Sie, von der Eichung eines Messgerätes spricht man nur, wenn die Kalibrierung durch eine öffentliche Stelle vorgenommen wird (z.B. Waage im Supermarkt).

Oftmals geben bereits die Hersteller von Messgeräten die Fehlergrenzen ihrer Apparaturen an. Folglich ist es in solchen Fällen nicht möglich, genauer als die angegeben Fehlergrenzen zu messen. Sollte dies nicht der Fall sein, so gilt im Praktikum die Regel, dass der systematische Fehler der Hälfte der/des Ables-/Anzeigenintervalls entspricht. Liest man z.B. auf einer Uhr, deren kleinste Anzeigenskala eine Sekunde ist, die Zeit ab, so nimmt man einen systematischen Fehler von 0.5s an.

1.2.3 Fortpflanzung von Messfehlern

In der Regel werden Messergebnisse verwendet, um weitere Grössen daraus abzuleiten bzw. zu berechnen. Oftmals gehen in solch eine Berechnung aber mehrere fehlerbehaftete Grössen/Parameter mit ein. Es stellt sich dann die Frage, wie sich die einzelnen Messunsicherheiten auf das Endergebnis auswirken, bzw. wie dann die Messunsicherheit/ der Messfehler der abgeleiteten/berechneten Grössen zu bestimmen ist. Für unabhängige (nicht korrelierte) Grössen lässt sich der resultierende zufällige Fehler aus den zufälligen Fehlern der involvierten Messgrössen mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung berechnen. In diesem Versuch werden die Zeit/Periodendauer t und die Länge l eine Rolle spielen, um daraus die Schwebeschleunigung g zu bestimmen. Sowohl bei der Bestimmung der Periodendauer t als auch der Länge l wird ein statistischer Fehler zu bestimmen sein. Für den statistischen Fehler der Schwebeschleunigung g folgt dann:

$$|\Delta g_{stat}| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_{stat}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l_{stat}\right)^2} \quad (1.7)$$

Für die systematischen Messfehler beider Grössen ist es schwieriger, einen resultierenden systematischen Fehler anzugeben. Im Falle kleiner systematischer Fehler kann man den resultierenden systematischen Messfehler durch eine einfache Taylorentwicklung erster Ordnung abschätzen:

$$g(t + \Delta t_{sys}, l + \Delta l_{sys}) = g(t, l) + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \Delta t_{sys} + \frac{\partial g}{\partial l} \cdot \Delta l_{sys} \quad (1.8)$$

Daraus erkennt man folgenden Zusammenhang für den resultierenden systematischen Messfehler:

$$|\Delta g_{sys}| = \left| \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \Delta t_{sys} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial l} \cdot \Delta l_{sys} \right| \quad (1.9)$$

Nun gilt es noch zu beachten, dass bei einer korrekten Darstellung von Messergebnissen der systematische und der zufällige/statistische Fehler getrennt von einander angegeben werden. Im Falle einer Messung der Zeit t würde man konkret

$$t = \bar{t} \pm \Delta t_{stat} \pm \Delta t_{sys} \quad (1.10)$$

schreiben.

1.2.4 Extreme Messfehler

Im Experiment wird es erfahrungsgemäss immer wieder vorkommen, dass Messwerte extrem von den zu erwartenden Werten abweichen. In der Regel liegt die Ursache solcher Vorkommnisse in der Unerfahrenheit und der eventuellen Ungeschicklichkeit der Praktikanten begründet. Andererseits kann es sich jedoch auch um ein defektes Messgerät oder eine defekte Apparatur handeln. In jedem Fall gehört es aber zum grundlegenden Selbstverständnis der Naturwissenschaften, dass unliebsame oder unerwartete Messwerte nicht unterdrückt bzw. gefälscht werden! In jedem Fall muss nach der Ursache dieser extremen Resultate gesucht werden. Die nachträgliche Abänderung von Messwerten wird auf keinen Fall toleriert und kann zum Ausschluss aus dem Praktikum führen! Lediglich im Falle defekter Gerätschaften und der expliziten Bestätigung durch den entsprechenden Betreuer ist es gestattet, Messwerte bei der Auswertung nicht zu berücksichtigen. Jedoch gilt es stets, dies im Versuchsprotokoll zu vermerken!

1.3 Fragen zur Vorbereitung des Versuchs

Die folgenden Fragen sollte jeder Praktikant beantworten können. Bei allen nachfolgenden Experimenten wird nach dem gleichem Prinzip verfahren und es wird erwartet, dass sich die Praktikanten *eigenständig* den benötigten Stoff erarbeiten.

- Wodurch ist ein mathematisches Pendel beschrieben? Geben Sie die Bewegungsgleichung an und berechnen sie die Periodendauer des Pendels. Welchen Einfluss hat die endliche Ausdehnung des Pendelkörpers?
- Warum wird hier die Schwingungsdauer am Nulldurchgang und nicht an einem der Umkehrpunkte durchgeführt? Bedenken Sie hierzu, ob es günstiger ist - in Abhängigkeit von der Periodendauer - im Umkehrpunkt oder im Nulldurchgang zu messen, um möglichst kleine Messfehler zu erhalten?
- Warum ist es besser, wenn jede Messreihe nur von einem Studenten vorgenommen wird?
- Wie gross muss man die Intervallbreite eines Histogramms (*binning*) wählen, wenn sich bei der Messung von 200 Perioden eine Standardabweichung des Mittelwertes von 0.3s ergeben hat?
- Ist die Intervallbreite/binning des Histogramms eine Funktion von der Anzahl der Messungen n ?
- Was ergibt sich für den statistischen Fehler, wenn man statt 200 einzelne Perioden die Dauer von 200 Perioden bestimmt?
- Wie lauten die folgenden Verteilungsfunktionen und wo treten diese auf? (min. je ein Beispiel)
Gaussverteilung, Binomialverteilung, Gleichverteilung, Poissonverteilung
- Was versteht man unter den folgenden Begriffen: wahrer Wert, Mittelwert, zufälliger/statistischer Fehler, systematischer Fehler, Standardabweichung, Varianz?
- Wie beeinflussen die Messfehler der Eingangsgrößen das Endergebnis einer Messung? Welches allgemeine Berechnungsschema gilt?
- Recherchieren Sie die heutige Definition/Bestimmung der physikalischen Einheiten Sekunde und Meter.
- Wie lauten die Grundeinheiten des SI-Systems

1.4 Durchführung des Versuchs

Die Aufgabe der Praktikanten ist es, mit Hilfe eines Pendels der Länge l die Schwerebeschleunigung g der Erde aus der Periodendauer des Pendels zu bestimmen. Die Länge l des Fadens, an welchem das Pendel aufgehängt wird, ist manuell mit einem Massband zu bestimmen. Die Periodendauer des Pendels wird mit Hilfe einer Stoppuhr gemessen.

Ziel des Versuches ist es *nicht*, möglichst exakt den Wert von g zu bestimmen, denn hierfür gäbe es natürlich Versuche, welche besser geeignet wären. Vielmehr dient dieser Versuch, wie eingangs bereits erwähnt, dem Erlernen der Methodik der Fehleranalyse und des grundlegenden experimentellen Arbeitens in der Physik. Weiterhin soll dieser Versuch den Studenten vor Augen führen, was die Ansprüche dieses Praktikums sind, und welches Mass an Eigeninitiative und Fleiss verlangt werden.

- Man messe die Länge l des Pendels und schätze den zufälligen Fehler ab. Die Länge des Pendels ist durch den Abstand des Aufhängepunktes bis zum Mittelpunkt des Pendelkörpers gegeben. Wieso? Wie gross ist der systematische Fehler des Massstabes?
- Man messe 200 mal die Periodendauer t des Pendels. Beachte, es gilt *200mal eine einzige* Periodendauer zu messen und nicht die Dauer von 200 Perioden. Worin liegt der Unterschied? Messe nun zusätzlich 10 mal die Dauer von 20 Perioden.
- Messe für vier weitere Pendel deren Länge und jeweils 1 mal 20 Perioden.

Wichtig: Verwende eine Stoppuhr die auf zwei Nachkommastellen genau messen kann.

1.5 Auswertung des Versuchs

Die Auswertung dieses Versuchs und aller weiterer zu absolvierender Versuche dieses Praktikums hat möglichst eigenständig zu erfolgen. *Die Eigenständige Arbeit und die Fähigkeit sich unabhängig in neue Sachverhalte einarbeiten zu können, gehören zu den wesentlichen Kernkompetenzen eines Physikers.*

Selbstverständlich erhalten Sie Hilfe, sollten Sie an einem Punkt nicht mehr vorwärts kommen. Jedoch sollten die Studenten immer zuerst versuchen, ihre Problem selbst in den Griff zu bekommen. Dies betrifft vor allem Dinge wie den Umgang mit Taschenrechnern, das korrekte Umformen von einfachsten Gleichungen und die Verwendung korrekter Einheiten, Grössenordnungen (z.B cm statt m) und korrekte Zahlenwerte von Naturkonstanten.

- Erstellen Sie Histogramme für $n = 10, 25, 50, 100, 200$ Messwerte der Einzelperioden
- Berechnen/bestimmen Sie für jeden Zwischenschritt $n = 10, 25, 50, 100, 200$ der Einzelperioden und für die Messung der Mehrfachperioden den Mittelwert, die Standardabweichung des Mittelwertes und den Fehler des Mittelwertes
- Berechnen Sie aus dem Mittelwert aller gewonnenen Messwerte die Schwerebeschleunigung g der Erde. Berechnen Sie den zufälligen/statistischen und den systematischen Fehler von g .
- Von einer sinnvollen Anzahl von Messungen spricht man genau dann, wenn der statistische Fehler des Endergebnisses etwa gleich dem systematischen Fehler des Endergebnisses ist. Überprüfen Sie, ob dies in Ihrem Experiment der Fall war. Sollte dies nicht der Fall gewesen sein, so berechnen/schätzen Sie ab, wie viele Messungen n Sie hätten durchführen müssen, um dies zu gewährleisten.
- Erstellen Sie nun ein Diagramm aus den Messungen der Mehrfachperioden, in dem Sie Die Perioden gegen die Länge des Pendels auftragen.
- Überlegen Sie sich welche Proportionalität zwischen den aufgetragenen Messgrössen besteht und erstellen Sie dem entsprechend einen Fit.