

IFO

Modul Fehlerrechnung

Fehleranalyse

In diesem einführenden Versuch wird mittels eines Pendels die sinnvolle Durchführung und Auswertung eines wissenschaftlichen Experimentes veranschaulicht. Des Weiteren soll der Umgang mit den dazu notwendigen statistischen Mitteln vertieft und anhand der durchgeführten Messungen angewendet werden.

Versuch IF0 - Fehleranalyse

In diesem einführenden Versuch wird mittels eines Pendels die sinnvolle Durchführung und Auswertung eines wissenschaftlichen Experimentes veranschaulicht. Des Weiteren soll der Umgang mit den dazu notwendigen statistischen Mitteln vertieft und anhand der durchgeführten Messungen angewendet werden.

1.1 Fragen zur Vorbereitung

Ziel ist es, immer zu verstehen, was man macht. Eine gute Vorbereitung der Experimente ist daher zentral. Das beinhaltet die Lektüre der Versuchsanleitung sowie weiterführender Literatur zum Thema, nutzen von Internetquellen, und mehr.

Die *Fragen zur Vorbereitung* solltest du jeweils vor der Versuchsdurchführung beantworten können. Die Antworten findest du teilweise direkt in der Versuchsanleitung, bei einer kurzen Suche im Internet oder in der Fachliteratur.

- Wie lauten die Grundeinheiten des SI-Systems? Warum ist es wichtig, immer in SI-Grundeinheiten zu arbeiten?
- Recherchiere die heutige Definition der physikalischen Einheiten Sekunde und Meter.
- Wodurch ist ein mathematisches Pendel beschrieben? Gib die Bewegungsgleichung an und berechne die Periodendauer des Pendels. Welchen Einfluss hat die endliche Ausdehnung des Pendelkörpers?
- Warum ist es sinnvoll, die Messung der Schwingungsdauer eines Pendels am Nulldurchgang und nicht an einem der Umkehrpunkte durchzuführen? Bedenke hierzu, ob es günstiger ist - in Abhängigkeit von der Periodendauer - im Umkehrpunkt oder im Nulldurchgang zu messen, um möglichst kleine Messfehler zu erhalten.
- Warum ist es besser, wenn jede Messreihe nur von einer Person vorgenommen wird?
- Was ist ein Histogramm? Wie gross muss man die Intervallbreite eines Histogramms (genannt *binning*) wählen, wenn sich bei der Messung von 200 Perioden T eine Standardabweichung des Mittelwertes von beispielsweise 0.3s ergeben hat?
- Ist die Intervallbreite (*binning*) des Histogramms eine Funktion von der Anzahl der Messungen n ?
- Was ergibt sich für den statistischen Fehler, wenn man statt 200 einzelne Perioden die Dauer von 200 Perioden bestimmt?
- Wie lauten die folgenden Verteilungsfunktionen und wo treten diese auf? Gib jeweils mindestens ein Beispiel an: Gaussverteilung, Binomialverteilung, Gleichverteilung, Poissonverteilung. Erkläre, wie du die jeweils passende Verteilungsfunktion für dein Datenset auswählst.
- Was versteht man unter den folgenden Begriffen: Wahrer Wert, Mittelwert, grobe Abweichung, zufälliger/ statistischer Fehler, systematischer Fehler und Standardabweichung?
- Wie beeinflussen die Messfehler der Eingangsgrößen das Endergebnis einer Messung? Welches allgemeine Berechnungsschema gilt?

Bei allen nachfolgenden Experimenten wird nach dem gleichem Prinzip verfahren. Es wird grundsätzlich erwartet, dass sich die Studierenden *eigenständig* in die jeweilige Thematik des Experiments einarbeiten können. Bei Schwierigkeiten stehen die Coaches gerne zur Verfügung.

1.2 Motivation

Ein wesentliches Ziel dieses Praktikums ist die Vermittlung von Kompetenz und das Sammeln von Erfahrung in Bezug auf die qualitative und quantitative Bewertung von Messergebnissen. Dies ist ein wesentlicher Bestandteil jeder Arbeit in der Experimentalphysik und von essentieller Bedeutung, wenn es gilt, die Gültigkeit eines theoretischen Modells zu verifizieren oder gegebenenfalls zu widerlegen. Jede Messung, egal ob in den Naturwissenschaften oder anderswo, unterliegt prinzipiell immer zufälligen und systematischen Abweichungen, welche allgemein als *Messfehler* bzw. *Messunsicherheit* bezeichnet werden.

In diesem ersten Versuch des Praktikums soll anhand eines einfachen Experiments erlernt werden, welche Arten von Messunsicherheiten auftreten können, wie sie quantifiziert werden können und wie sich die Unsicherheiten einzelner Messgrößen auf das Endresultat auswirken (*Fehlerfortpflanzung*). Von den Studierenden wird erwartet, dass die hier erlernten Methoden im weiteren Verlauf des Praktikums möglichst eigenständig auf alle zu absolvierenden experimentellen Arbeiten angewandt werden. Jedes zukünftige Versuchsprotokoll muss eine ausreichende Fehleranalyse der gewonnenen Messdaten und Ergebnisse enthalten, andernfalls wird die Durchführung des Versuchs nicht anerkannt und das Experiment muss wiederholt werden.

1.3 Messungenauigkeiten

Das Ziel einer Messung ist die bestmögliche Bestimmung des sogenannten *Wahren Wertes* einer physikalischen Größe. Dieser wahre Wert ist jedoch ein theoretisches Konstrukt und der gemessene Wert unterscheidet sich von diesem durch die bereits erwähnten zufälligen und systematischen Messunsicherheiten, welche sich niemals vollständig ausschliessen lassen. Das Ziel der Experimentierenden ist es nun, die betreffenden Fehlerquellen zu identifizieren und deren Einfluss soweit wie möglich zu minimieren. Im weiteren Verlauf des Studiums werden die Studierenden lernen, dass der klassische Charakter der Messgröße, welcher immer die Existenz des wahren Wertes voraussetzt, in der Quantenmechanik ohnehin seine Bedeutung verliert. Letzten Endes sind dann nur noch Aussagen über die Wahrscheinlichkeit einer Messgröße/Observable möglich.

Im Praktikum wird jedoch die Ungenauigkeit und Präzision des Messverfahrens stets um viele Größenordnungen über der Unsicherheit/Schwankungsbreite des wahren Wertes liegen, so dass dessen Existenz bedenkenlos angenommen werden kann.

1.3.1 Grobe Abweichungen

Bei der Durchführung von Experimenten wird es erfahrungsgemäss immer wieder vorkommen, dass Messwerte extrem von den zu erwartenden Werten abweichen. Wir sprechen hier von groben Abweichungen. Häufig liegt die Ursache solcher Vorkommnisse im Defekt eines Messgerätes, dessen falscher Bedienung oder in der Unerfahrenheit begründet. In jedem Fall gehört es zum grundlegenden Selbstverständnis der Naturwissenschaften, dass unliebsame oder unerwartete Messwerte nicht unterdrückt bzw. gefälscht werden! Es muss nach der Ursache dieser extremen Abweichungen gesucht werden. Die nachträgliche Abänderung von Messwerten wird auf keinen Fall toleriert und kann zum Ausschluss aus dem Praktikum führen! Lediglich im Falle defekter Gerätschaften und der expliziten Bestätigung durch den entsprechenden Coach ist es gestattet, Messwerte bei der Auswertung nicht zu berücksichtigen. Jedoch gilt es stets, diese dennoch im Versuchsprotokoll zu vermerken und eine Begründung anzugeben, weshalb sie für die Auswertung nicht benutzt wurden.

1.3.2 Statistische Messfehler

Was heisst messen? In der Physik versteht man darunter die Ermittlung des Wertes einer physikalischen Grösse mit Hilfe von Gerätschaften und technischen Hilfsmitteln mit dem Ziel, dem wahren Wert der betreffenden physikalischen Grösse möglichst nahe zu kommen.

Jedoch unterliegt solch eine Prozedur diversen Einflüssen, so dass eine Wiederholung der Messung normalerweise nicht erneut dasselbe Resultat liefert. Man sagt, die Messwerte seien verteilt und es ist nun von enormer Wichtigkeit die so genannte Verteilungsfunktion $\varphi(x)$ des Messwertes x_i zu kennen. Aus dem Zentralen Grenzwertsatz der Statistik folgt, dass für unabhängige, identische Zufallsvariablen der Erwartungswert und die Varianz endlich sind. Die zugehörige Verteilungsfunktion der Messwerte wird als Gaussverteilung, oder *Normalverteilung* bezeichnet. Im Fall der Messgrösse x_i lautet diese:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnet μ den sogenannten *Mittelwert* und σ die *Standardabweichung*. Zu dieser kontinuierlichen Verteilung gelangt man jedoch erst nach Bildung des Grenzwertes für eine unendliche Zahl n von Messwerten x_i . Für eine endliche Anzahl von Messwerten lassen sich die folgenden beiden Abschätzungen machen:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Mittelwert} \quad (1.2)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad \text{Standardabweichung des Einzelwertes} \quad (1.3)$$

Gelegentlich spricht man auch von der Standardabweichung der Stichprobe um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um die Standardabweichung *eines einzelnen Messwertes* handelt. Dies darf nicht mit der als *Standardabweichung des Mittelwertes* bezeichneten Grösse verwechselt werden:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} \quad (1.4)$$

Um eine Reihe von Messwerten statistisch hinreichend zu charakterisieren, sollte der Mittelwert und die Standardabweichung des Mittelwertes angegeben werden. Wenn also dieselbe physikalische Grösse hundertmal gemessen wurde ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$), so lautet das anzugebende Resultat:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \quad (1.5)$$

Im Intervall $\pm\sigma_{\bar{x}}$ befinden sich dann 68.63% aller Messwerte. Weiterhin gilt, dass sich in den Intervallen $\pm 2\sigma_{\bar{x}}$ und $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$ dann 95.4% bzw. 99.7% aller Messwerte befinden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom Vertrauensintervall bzw. vom Vertrauensniveau. Am gebräuchlichsten ist ein Vertrauensintervall von 0.95, d.h. 95% aller Messwerte sollen innerhalb dieses Intervalls liegen. Dieser Bereich ist in etwa identisch mit dem oben bereits erwähnten $2\sigma_{\bar{x}}$ Intervall. Daher ist die Beziehung

$$\Delta\bar{x} = \frac{2\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (1.6)$$

sehr gebräuchlich und wird gemeinhin auch als *statistischer Fehler des Mittelwertes* bezeichnet. Abhängig vom Experiment kann es auch sinnvoll sein, $\Delta\bar{x} = \sigma_{\bar{x}}$ als statistischen Fehler des Mittelwerts anzunehmen. Es geht hier lediglich um eine Abschätzung der Präzision, wobei letztere Variante häufig ausreichend gut ist.

1.3.3 Systematische Messfehler

Nach Berücksichtigung der statistischen Schwankung erhält man, wie im vorherigen Abschnitt dargelegt wurde, den Mittelwert \bar{x} aller gemessenen Werte. Dieser ist jedoch nach wie vor nicht identisch mit dem wahren Wert. Die einseitig gerichtete Differenz zwischen wahren Wert und Mittelwert wird als *systematischer Messfehler* bezeichnet. Dieser ist in der Regel wesentlich schwieriger zu quantifizieren als der statistische Fehler. Oft erhält man den systematischen Fehler nur durch Vergleich mehrerer Messapparaturen/-geräte. An dieser Stelle kommt die Kalibrierung der entsprechenden Messgeräte ins Spiel. Beachte, dass man nur von der Eichung eines Messgerätes spricht, wenn die Kalibrierung durch eine öffentliche Stelle vorgenommen wird (z.B. Amt kalibriert die Waage im Supermarkt).

Oftmals geben bereits die Hersteller von Messgeräten die Fehlergrenzen ihrer Apparaturen an. Diese sind häufig auf dem Gerät selbst (z.B. Etikett auf der Rückseite) oder in der Bedienungsanleitung angegeben. Folglich ist es in solchen Fällen nicht möglich, genauer als die angegebenen Fehlergrenzen zu messen. Verfügt man über keine Angaben, so gilt im Praktikum die Regel, dass der systematische Fehler der Hälfte der /des Ablese-/Anzeigenintervalls entspricht. Liest man z.B. auf einer Uhr, deren kleinste Anzeigenskala eine Sekunde ist, die Zeit ab, so nimmt man einen systematischen Fehler des Messgerätes von 0.5s an. Bei vielen Experimenten treten mehrere systematische Fehler auf: Beim Benutzen einer Stoppuhr beispielsweise hat die Uhr eine Ungenauigkeit, dann kommt die Reaktionszeit der experimentierenden Person dazu, bei analogen Stoppuhren kommt vielleicht noch eine Ungenauigkeit durch Parallaxe dazu (je nach Blickwinkel beim Betrachten der Uhr liegt der Zeiger über dem einen Sekunden-Strich oder einem anderen), usw. Eine gute Fehleranalyse berücksichtigt sämtliche Fehlerquellen.

1.3.4 Fortpflanzung von Messfehlern

In der Regel werden Messergebnisse verwendet, um weitere Größen daraus abzuleiten bzw. zu berechnen. Oftmals gehen in solch eine Berechnung aber mehrere fehlerbehaftete Größen/Parameter mit ein. Es stellt sich dann die Frage, wie sich die einzelnen Messunsicherheiten auf das Endergebnis auswirken, bzw. wie dann die Messunsicherheit oder der Messfehler der abgeleiteten/berechneten Größen zu bestimmen ist. Für unabhängige (nicht korrelierte) Größen lässt sich der resultierende zufällige Fehler aus den zufälligen Fehlern der involvierten Messgrößen mit Hilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung berechnen. In diesem Versuch werden die Zeit/Periodendauer T und die Länge l eine Rolle spielen, um daraus die Schwerkbeschleunigung g zu bestimmen. Sowohl bei der Bestimmung der Periodendauer t als auch der Länge l wird ein statistischer Fehler zu bestimmen sein. Für den statistischen Fehler der Schwerkbeschleunigung g folgt dann:

$$|\Delta g_{stat}| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T} \cdot \Delta T_{stat}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l} \cdot \Delta l_{stat}\right)^2} \quad (1.7)$$

Für die systematischen Messfehler beider Größen ist es schwieriger, einen resultierenden systematischen Fehler anzugeben. Im Falle kleiner systematischer Fehler kann man den resultierenden systematischen Messfehler durch eine einfache Taylorentwicklung erster Ordnung abschätzen:

$$g(t + \Delta T_{sys}, l + \Delta l_{sys}) = g(T, l) + \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \Delta T_{sys} + \frac{\partial g}{\partial l} \cdot \Delta l_{sys} \quad (1.8)$$

Daraus erkennt man folgenden Zusammenhang für den resultierenden systematischen Messfehler:

$$|\Delta g_{sys}| = \left| \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \Delta T_{sys} \right| + \left| \frac{\partial g}{\partial l} \cdot \Delta l_{sys} \right| \quad (1.9)$$

1.3.5 Angabe von Ergebnissen

Nun gilt es noch zu beachten, dass bei einer korrekten Darstellung von Messergebnissen der systematische und der zufällige/statistische Fehler getrennt von einander angegeben werden. Im Falle einer Messung der Zeit T würde man konkret

$$T = \bar{T} \pm \Delta T_{sys} \pm \Delta T_{stat} \quad (1.10)$$

schreiben. Ein Experiment ist dann gut designt, wenn der systematische und der statistische Fehler in der gleichen Grössenordnung liegen. Es ist weiter darauf zu achten, dass die korrekten physikalischen Einheiten angegeben werden.

1.4 Durchführung

Die Aufgabe der Studierenden ist es, mit Hilfe eines Pendels der Länge l die Fallbeschleunigung g der Erde aus der Periodendauer T des Pendels zu bestimmen. Die Länge l des Fadens, an welchem das Pendel aufgehängt wird, ist manuell mit einem Massband oder Zollstock zu bestimmen. Die Periodendauer des Pendels wird mit Hilfe einer Stoppuhr gemessen.

Ziel des Versuches ist es *nicht*, möglichst exakt den Wert von g zu bestimmen, denn hierfür gäbe es natürlich Versuche, welche deutlich besser geeignet wären. Vielmehr dient dieser Versuch dem Erlernen der Methodik der Fehleranalyse und des grundlegenden experimentellen Arbeitens in der Physik. Weiterhin soll dieser Versuch den Studierenden vor Augen führen, was die Ansprüche dieses Praktikums sind, und welches Mass an Eigeninitiative und Fleiss verlangt werden.

- Miss die Länge l des Pendels und schätze den zufälligen Fehler ab. Die Länge des Pendels ist durch den Abstand des Aufhängepunktes bis zum Mittelpunkt des Pendelkörpers gegeben. Weshalb? Wie gross ist der systematische Fehler dieser Längenmessung?
- Miss 200 mal die Periodendauer T des Pendels. Beachte, es gilt *200mal eine einzige* Periodendauer zu messen und nicht die Dauer von 200 Perioden. Worin liegt der Unterschied?
- Miss zusätzlich 10 mal die Dauer von 20 Perioden.
- Miss für vier weitere, unterschiedlich lange Pendel deren Länge l und jeweils einmal die Dauer von 20 Perioden.
- Notiere dir zu sämtlichen Messungen die jeweiligen systematischen Messungenauigkeiten.

Wichtig: Verwende eine Stoppuhr, die auf zwei Nachkommastellen genau messen kann. Diese wird zur Verfügung gestellt. Die Messung mit dem eigenen Smartphone kann vorteilhaft sein, wenn dieses die Option zur Messung der Dauer von mehreren *Runden* ermöglicht.

1.5 Auswertung

1. Zeichne mit OriginPro (oder einer anderen geeigneten Analyse-Software) wie folgt Histogramme:
 - (a) Du hast 200mal *eine* einzelne Perioden eines Fadenpendels gemessen. Erstelle nun zuerst für die ersten $n = 10$ gemessenen Einzelperioden aus diesem Datensatz ein Histogramm.

- (b) Zeichne nun Histogramme für die ersten $n = 25, 50, 100, 200$ Messwerte der Einzelperioden.
 - (c) Füge in alle fünf gezeichneten Histogramme eine Gausskurve ein.
 - (d) Vergleiche die fünf Histogramme. Was fällt dir auf?
2. Berechne mit OriginPro jeweils für die ersten $n = 10, 25, 50, 100, 200$ Messwerte der Einzelperioden den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung des Mittelwerts (genannt SE des Mittelwerts).
3. Die Periodendauer T eines Pendels ist gegeben durch die Formel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung und l die Länge des Pendels.

- (a) Stelle die Formel für die Periodendauer T nach der Erdbeschleunigung g um.
 - (b) Berechne aus dem Mittelwert der ersten $n = 10$ Einzelperioden die Schwerebeschleunigung g der Erde. Berechne für diesen Fall den statistischen Fehler Δg_{stat} und den systematischen Fehler Δg_{sys} der Erdbeschleunigung.
 - (c) Wiederhole die Bestimmung der Erdbeschleunigung g anhand des Mittelwerts der Einzelperioden für $n = 25, 50, 100, 200$ und führe jeweils eine vollständige Fehlerrechnung durch.
 - (d) Von einer sinnvollen Anzahl von Messungen spricht man genau dann, wenn der statistische Fehler des Endergebnisses etwa gleich dem systematischen Fehler des Endergebnisses ist. Warum ist das so?
 - (e) Welche Anzahl Messwerte n ist in diesem Pendelexperiment mit den Einzelmessungen sinnvoll?
4. Jetzt wollen wir ein Punktdiagramm zeichnen und die Erdbeschleunigung g als Parameter aus dem Fit bestimmen. Dazu gehen wir wie folgt vor:
- (a) Du hast bei fünf unterschiedlich langen Pendeln die Dauer von 20 Perioden gemessen. Berechne daraus für alle fünf Pendel mit Hilfe von OriginPro jeweils die mittlere Dauer T einer Periode.
 - (b) Worin liegt der Vorteil dieser Mehrfachmessungen verglichen mit den Einzelmessungen, wenn man die Dauer *einer* Periode möglichst exakt bestimmen möchte?
 - (c) Erstelle ein Punktdiagramm mit den mittleren Periodendauern dieser fünf Pendel. Trage dabei die Periodendauer T gegen die Länge l des Pendels auf. Zeichne die Fehlerbalkchen ein, formatiere das Diagramm und beschrifte die Achsen sauber mit der korrekten Bezeichnung und einer physikalischen Einheit.
 - (d) überlege dir anhand der Formel für die Periodendauer T , welche Proportionalität zwischen den im Punktdiagramm aufgetragenen Messgrößen besteht. Lege eine passende, benutzerdefinierte Fitkurve an die fünf Messpunkte im Diagramm und lass dir als Parameter die Erdbeschleunigung g ausgeben.
 - (e) Mache eine vernünftige Fehlerabschätzung für g .
 - (f) Vergleiche dein Ergebnis mit den Resultaten aus den obigen Rechnungen mit den gemessenen Einzelperioden und mit dem Literaturwert.

1.6 Literatur

Zur Vorbereitung auf den Versuch wird unter anderem die folgende Literatur empfohlen:

- W. Demtröder, Experimentalphysik I - Mechanik und Wärme (5. Auflage), Kapitel 1, Springer Berlin, 2021
- J.R. Taylor, Introduction To Error Analysis, University Science Books, 1997